［ 東京工業大学 2007 年 第１類ＡＯ型 $\boxed{1}$ ］

この試験は現時点での諸君の論理的理解力の習熟度を測るためのものであり，あまりに乱暴な字ではその役に立ちません。できるだけ丁寧な字で，採点員が論理を追い易いように各自工夫し，結論をはっきりと記述して下さい。

整数 $m=1, 2, \cdots$ に対して, 実数 x の関数 $g_m(x)$ を $g_m(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2m}d\theta$ と定める。$g_m(x)$ の最小値を a_m，最大値を b_m とするとき，極限値 $\lim_{m\to\infty}\dfrac{a_m}{b_m}$ を求めよ。

$g_m(x)$ の被積分関数 $(\sin\theta)^{2m}$ は周期 π の周期関数であるから $g_m(x+\pi)=g_m$ $\cdots$① である。

したがって $0 \leqq x < \pi$ で考えればよい。

$$g_m{}'(x)=\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}^{2m}-\left(\sin x\right)^{2m}=\left(\cos x\right)^{2m}-\left(\sin x\right)^{2m}$$

であるから $g_m(x)$ の増減は下表に従う。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$g_m{}'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g_m(x)$		↗		↘		↗	

①より $g_m(0)=g_m(\pi)$ であるから $a_m=g_m\left(\dfrac{3}{4}\pi\right),\ b_m=g_m\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ である。

ここで，$\dfrac{3}{4}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{4}\pi$ で $0 \leqq \left(\sin\theta\right)^{2m} \leqq \left(\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)^{2m}$ であるから

$$0 \leqq a_m=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\left(\sin\theta\right)^{2m}d\theta \leqq \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\left(\sin\frac{3}{4}\pi\right)^{2m}d\theta=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\left(\frac{1}{2}\right)^{m}d\theta=\frac{1}{2^m}\cdot\frac{\pi}{2}\quad\cdots②$$

また，$\left(\sin\theta\right)^{2m} \geqq 0$ なので

$$b_m=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(\sin\theta)^{2m}\,d\theta \geqq \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi}(\sin\theta)^{2m}\,d\theta$$

ここで，$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ において $(\sin\theta)^{2m}\geqq\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^{2m}$ であるから

$$b_m\geqq\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^{2m}d\theta=\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi}\left(\frac{3}{4}\right)^m d\theta=\left(\frac{3}{4}\right)^m\cdot\frac{\pi}{3}\quad\cdots③$$

よって，②，③より $0\leqq\dfrac{a_m}{b_m}\leqq\dfrac{\dfrac{1}{2^m}\cdot\dfrac{\pi}{2}}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^m\cdot\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^m$ となるが，

$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^m\to 0$ であるから，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{a_m}{b_m}=0$