[東京工業大学 2007 年後期 $\boxed{1}$]

1 から 6 までの目がそれぞれ $\dfrac{1}{6}$ の確率で出るサイコロを 3 回振って出た目を順に $n_1,\ n_2,\ n_3$ とし，次の 3 次方程式を考える。

$$x^3 - n_1 x + (-1)^{n_2} n_3 = 0$$

(1) この方程式が相異なる 3 個の実数解をもつ確率を求めよ。

(2) この方程式が自然数の解をもつ確率を求めよ。

---

(1) $x^3 - n_1 x + (-1)^{n_2} n_3 = 0 \iff x^3 - n_1 x = -(-1)^{n_2} n_3 \quad \cdots①$

であり，グラフから相異なる 3 個の実数解をもつ条件は

$$-\frac{2}{3} n_1 \sqrt{\frac{n_1}{3}} < -(-1)^{n_2} n_3 < \frac{2}{3} n_1 \sqrt{\frac{n_1}{3}}$$

$$\iff \left| -(-1)^{n_2} n_3 \right| < \frac{2}{3} n_1 \sqrt{\frac{n_1}{3}}$$

$$\iff |n_3| < \frac{2}{3} n_1 \sqrt{\frac{n_1}{3}}$$

よって $n_3{}^2 < \dfrac{4}{27} n_1{}^3$

これを満たすのは $(n_1,\ n_3) = (2,\ 1),\ (3,\ 1),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 1),\ (5,\ 2),\ (5,\ 3),\ (5,\ 4),$

$$(6,\ 1),\ (6,\ 2),\ (6,\ 3),\ (6,\ 4),\ (6,\ 5)$$

のときで，n_2 は任意なので求める確率は $\dfrac{14}{6^2} = \dfrac{7}{18}$

(2) $x \geqq 3$ のとき $x^2 - n_1 \geqq 3^2 - 6 = 3$ であるから

①の左辺 $>$ $x^3 - n_1 x = x(x^2 - n_1) \geqq 3 \cdot 3 = 9$ となって $x \geqq 3$ の範囲には実数解をもたない。

よって，①が自然数解をもつとき，1 または 2 が解となる。

(ⅰ) $x = 1$ のとき

$1 - n_1 = -(-1)^{n_2} n_3$ より $n_2 = 2,\ 4,\ 6$ であり，

$(n_1,\ n_3)=(2,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 4),\ (6,\ 5)$ が解となる。

（ⅱ） $x=2$ のとき

$8-2n_1=-(-1)^{n_2}n_3$ より

$n_2=1,\ 3,\ 5$ のときは $(n_1,\ n_3)=(1,\ 6),\ (2,\ 4),\ (3,\ 2)$ が解となり，

$n_2=2,\ 4,\ 6$ のときは $(n_1,\ n_3)=(5,\ 2),\ (6,\ 4)$ が解となる。

したがって，求める確率は

$$\frac{3\cdot5+3\cdot3+3\cdot2}{6^3}=\frac{30}{6^3}=\frac{5}{36}$$

[東京工業大学 2007 年後期 $\boxed{2}$]

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ に対して関数 $f(x) = \dfrac{x}{\tan x}$, $g(x) = \dfrac{x}{\tan x} + \dfrac{\tan x}{x}$

を考える。

(1) $f'(x)$, $f''(x)$ の正負を判定し，$y = f(x)$ のグラフをかけ。

(2) $g'(x)$, $g''(x)$ の正負を判定し，$y = g(x)$ のグラフをかけ。

(3) 正定数 a に対して，2 曲線 $y = \log \dfrac{a}{f(x)}$ と $y = g(x)$ のグラフが交わるための条件を求めよ。

---

(1) $f'(x) = \dfrac{\tan x - x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x} = \dfrac{\sin x \cos x - x}{\sin^2 x}$ であり，

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において $0 < \sin x < x$, $0 < \cos x < 1$ であるから $\sin x \cos x < x$ より $f'(x) < 0$

さらに，$f''(x) = \dfrac{\{\cos x \cos x + \sin x(-\sin x) - 1\}\sin^2 x - (\sin x \cos x - x) \cdot 2\sin x \cos x}{\sin^4 x}$ であり，

(分子) $= \left(\cos^2 x - \sin^2 x - 1\right)\sin^2 x - 2\sin x \cos x(\sin x \cos x - x)$

$= -2\sin^2 x \sin^2 x - 2\sin x \cos x(\sin x \cos x - x)$

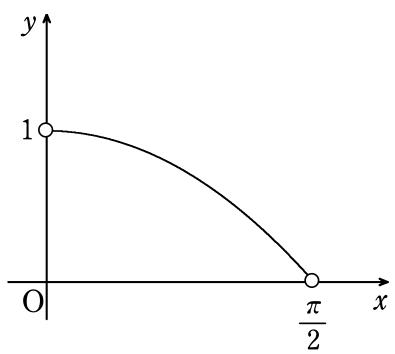
$= -2\sin x\left(\sin x \sin^2 x + \sin x \cos^2 x - x\cos x\right)$

$= -2\sin x\left(\sin x - x\cos x\right)$

$= -2\sin x \cos x\left(\tan x - x\right)$

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において $\sin x > 0$, $\cos x > 0$, $x < \tan x$ より $f''(x) < 0$

また，$\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x) = 1$，$\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} f(x) = 0$ であるから $y = f(x)$ のグラフは図のようになる。



(2) $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}$ より

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}=f'(x)\left\{1-\frac{1}{\{f(x)\}^2}\right\}>0$$

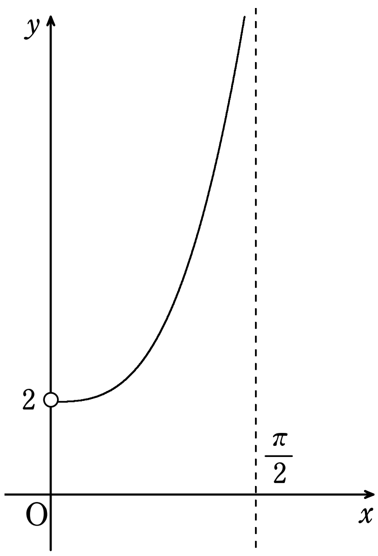
さらに，$g''(x)=f''(x)\left\{1-\dfrac{1}{\{f(x)\}^2}\right\}+f'(x)\cdot\dfrac{2f'(x)}{\{f(x)\}^3}$

$$=f''(x)\left\{1-\frac{1}{\{f(x)\}^2}\right\}+\frac{2\{f'(x)\}^2}{\{f(x)\}^3}$$

$f''(x)<0,\ 0<f(x)<1$ であるから $g''(x)>0$

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=\lim_{x\to+0}\left\{f(x)+\frac{1}{f(x)}\right\}=2$， $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}g(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left\{f(x)+\frac{1}{f(x)}\right\}=\infty$ より

$y=g(x)$ のグラフは図のようになる。



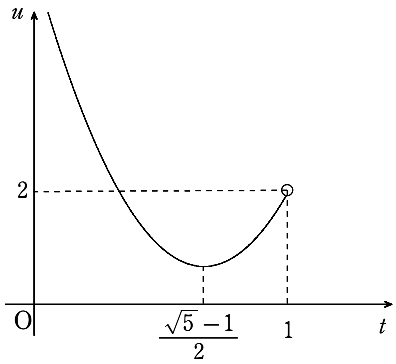
(3) $\log\dfrac{a}{f(x)}=g(x)\iff\log a=\log f(x)+g(x)\iff\log a=\log f(x)+f(x)+\dfrac{1}{f(x)}$ であり，

$t=f(x)$ とおくと $h(t)=\log t+t+\dfrac{1}{t}\quad(0<t<1)$ …① となる。

$h'(t)=\dfrac{1}{t}+1-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{t^2+t-1}{t^2}$ であり，

$\displaystyle\lim_{t\to+0}h(t)=\lim_{t\to+0}\left(\log t+t+\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to+0}\left(\frac{t\log t+1}{t}+t\right)=\infty$， $\displaystyle\lim_{t\to1-0}h(t)=2$ より

$u=h(t)$ のグラフは図のようになる。



したがって，①が実数解をもつ条件は

$$\log a \geqq h\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=\log\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\log\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\sqrt{5}=\log\frac{\sqrt{5}-1}{2}e^{\sqrt{5}}$$ より

$a \geqq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}e^{\sqrt{5}}$ である。