[東京工業大学 2007 年後期 $\boxed{2}$]

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ に対して関数 $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$, $g(x)=\dfrac{x}{\tan x}+\dfrac{\tan x}{x}$

を考える。

(1) $f'(x)$, $f''(x)$ の正負を判定し， $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2) $g'(x)$, $g''(x)$ の正負を判定し， $y=g(x)$ のグラフをかけ。

(3) 正定数 a に対して，2 曲線 $y=\log\dfrac{a}{f(x)}$ と $y=g(x)$ のグラフが交わるための条件を求めよ。

---

(1) $f'(x)=\dfrac{\tan x-x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x}=\dfrac{\sin x\cos x-x}{\sin^2 x}$ であり，

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において $0<\sin x<x$, $0<\cos x<1$ であるから $\sin x\cos x<x$ より $f'(x)<0$

さらに， $f''(x)=\dfrac{\{\cos x\cos x+\sin x(-\sin x)-1\}\sin^2 x-(\sin x\cos x-x)\cdot 2\sin x\cos x}{\sin^4 x}$ であり，

（分子） $=\left(\cos^2 x-\sin^2 x-1\right)\sin^2 x-2\sin x\cos x(\sin x\cos x-x)$

$=-2\sin^2 x\sin^2 x-2\sin x\cos x(\sin x\cos x-x)$

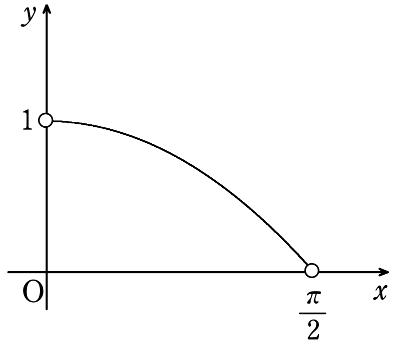
$=-2\sin x\left(\sin x\sin^2 x+\sin x\cos^2 x-x\cos x\right)$

$=-2\sin x\left(\sin x-x\cos x\right)$

$=-2\sin x\cos x\left(\tan x-x\right)$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において $\sin x>0$, $\cos x>0$, $x<\tan x$ より $f''(x)<0$

また， $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=1$， $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}f(x)=0$ であるから $y=f(x)$ のグラフは図のようになる。



⑵ $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}$ より

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}=f'(x)\left\{1-\frac{1}{\{f(x)\}^2}\right\}>0$$

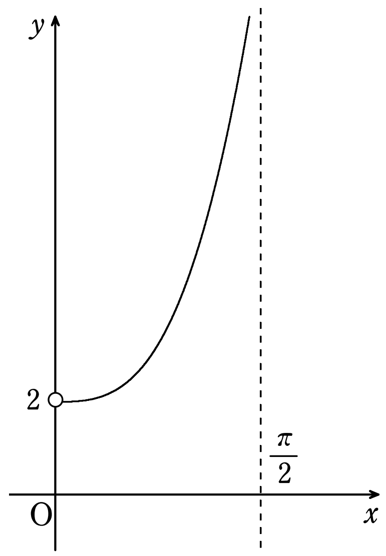
さらに，$g''(x)=f''(x)\left\{1-\dfrac{1}{\{f(x)\}^2}\right\}+f'(x)\cdot\dfrac{2f'(x)}{\{f(x)\}^3}$

$$=f''(x)\left\{1-\frac{1}{\{f(x)\}^2}\right\}+\frac{2\{f'(x)\}^2}{\{f(x)\}^3}$$

$f''(x)<0,\ 0<f(x)<1$ であるから $g''(x)>0$

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=\lim_{x\to+0}\left\{f(x)+\frac{1}{f(x)}\right\}=2$，$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}g(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left\{f(x)+\frac{1}{f(x)}\right\}=\infty$ より

$y=g(x)$ のグラフは図のようになる。



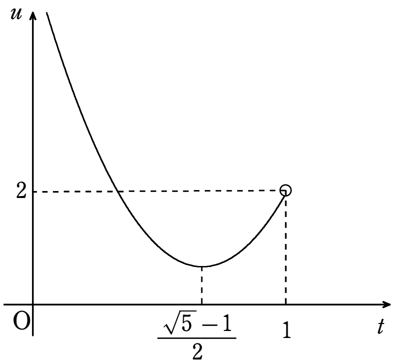
⑶ $\log\dfrac{a}{f(x)}=g(x)\iff \log a=\log f(x)+g(x)\iff \log a=\log f(x)+f(x)+\dfrac{1}{f(x)}$ であり，

$t=f(x)$ とおくと $h(t)=\log t+t+\dfrac{1}{t}\quad(0<t<1)$ …① となる。

$h'(t)=\dfrac{1}{t}+1-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{t^2+t-1}{t^2}$ であり，

$\displaystyle\lim_{t\to+0}h(t)=\lim_{t\to+0}\left(\log t+t+\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to+0}\left(\frac{t\log t+1}{t}+t\right)=\infty$，$\displaystyle\lim_{t\to1-0}h(t)=2$ より

$u=h(t)$ のグラフは図のようになる。



したがって，①が実数解をもつ条件は

$$\log a \geqq h\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=\log\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\log\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\sqrt{5}=\log\frac{\sqrt{5}-1}{2}e^{\sqrt{5}}$$ より

$a \geqq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}e^{\sqrt{5}}$ である。