[東京工業大学 2007 年後期 $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

1 から 6 までの目がそれぞれ $\dfrac{1}{6}$ の確率で出るサイコロを 3 回振って出た目を順に $n_1,\ n_2,\ n_3$ とし，次の 3 次方程式を考える。

$$x^3 - n_1 x + (-1)^{n_2} n_3 = 0$$

(1) この方程式が相異なる 3 個の実数解をもつ確率を求めよ。

(2) この方程式が自然数の解をもつ確率を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) $x^3 - n_1 x + (-1)^{n_2} n_3 = 0 \iff x^3 - n_1 x = -(-1)^{n_2} n_3 \quad \cdots①$

であり，グラフから相異なる 3 個の実数解をもつ条件は

$$-\frac{2}{3} n_1 \sqrt{\frac{n_1}{3}} < -(-1)^{n_2} n_3 < \frac{2}{3} n_1 \sqrt{\frac{n_1}{3}}$$

$$\iff \left| -(-1)^{n_2} n_3 \right| < \frac{2}{3} n_1 \sqrt{\frac{n_1}{3}}$$

$$\iff |n_3| < \frac{2}{3} n_1 \sqrt{\frac{n_1}{3}}$$

よって $n_3{}^2 < \dfrac{4}{27} n_1{}^3$

これを満たすのは $(n_1,\ n_3) = (2,1),(3,1),(4,1),(4,2),(4,3),\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),$

$$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)$$

のときで，n_2 は任意なので求める確率は $\dfrac{14}{6^2} = \dfrac{7}{18}$

(2) $x \geqq 3$ のとき $x^2 - n_1 \geqq 3^2 - 6 = 3$ であるから

①の左辺 $>$ $x^3 - n_1 x = x(x^2 - n_1) \geqq 3 \cdot 3 = 9$ となって $x \geqq 3$ の範囲には実数解をもたない。

よって，①が自然数解をもつとき，1 または 2 が解となる。

（i）$x = 1$ のとき

$1 - n_1 = -(-1)^{n_2} n_3$ より $n_2 = 2,\ 4,\ 6$ であり，

$(n_1,\ n_3)=(2,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 4),\ (6,\ 5)$ が解となる。

（ⅱ） $x=2$ のとき

$8-2n_1=-(-1)^{n_2}n_3$ より

$n_2=1,\ 3,\ 5$ のときは $(n_1,\ n_3)=(1,\ 6),\ (2,\ 4),\ (3,\ 2)$ が解となり，

$n_2=2,\ 4,\ 6$ のときは $(n_1,\ n_3)=(5,\ 2),\ (6,\ 4)$ が解となる。

したがって，求める確率は

$$\frac{3\cdot 5+3\cdot 3+3\cdot 2}{6^3}=\frac{30}{6^3}=\frac{5}{36}$$