[東京工業大学 2007 年前期 $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

p を素数，n を 0 以上の整数とする。

(1) m は整数で $0 \leqq m \leqq n$ とする。1 から p^{n+1} までの整数の中で，p^m で割り切れ p^{m+1} で割り切れないものの個数を求めよ。

(2) 1 から p^{n+1} までの 2 つの整数 $x,\ y$ に対し，その積 xy が p^{n+1} で割り切れるような組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) $0 \leqq m \leqq n$ のとき，1 から p^{n+1} までの整数の中で p^m で割り切れるものは,

$1p^m,\ 2p^m,\ 3p^m,\ \cdots,\ p^{n+1-m}p^m$ なので p^{n+1-m}（個）ある。

また，p^{m+1} で割り切れるものは,

$1p^{m+1},\ 2p^{m+1},\ 3p^{m+1},\ \cdots,\ p^{n-m}p^{m+1}$ なので p^{n-m}（個）ある。

p^{m+1} で割り切れる整数は p^m でも割り切れるので，求める個数は

$p^{n+1-m}-p^{n-m}=(p-1)p^{n-m}$ （個）

(2) (ⅰ) $x=p^{n+1}$ のとき

任意の y で積 xy が p^{n+1} で割り切れるので，組 $(x,\ y)$ の個数は p^{n+1}（個）である。

(ⅱ) $x=p^m$（$0 \leqq m \leqq n$）のとき

x が p^m で割り切れるが p^{m+1} では割り切れず，積 xy が p^{n+1} で割り切れる条件は,

「y が p^{n+1-m} で割り切れること」である。

したがって y は，$1p^{n+1-m},\ 2p^{n+1-m},\ 3p^{n+1-m},\ \cdots,\ p^m p^{n+1-m}$ なので p^m（個）ある。

このようになる x の個数は，(1)より $(p-1)p^{n-m}$（個）あるから,

このときの組 $(x,\ y)$ の個数は $(p-1)p^{n-m}\cdot p^m=(p-1)p^n$（個）である。

(ⅰ)(ⅱ)より積 xy が p^{n+1} で割り切れるような組 $(x,\ y)$ の個数は

$$p^{n+1}+\sum_{m=0}^{n}(p-1)p^n = p^{n+1}+(n+1)(p-1)p^n$$

$$=\{(n+2)p-(n+1)\}p^n \text{（個）}$$

[別解]

(1) $0 \leqq k \leqq n+1$ を満たす整数 k に対して,

1 から p^{n+1} までの整数の中で p^k で割り切れるものは $\dfrac{p^{n+1}}{p^k} = p^{n+1-k}$ 個ある。

p^{m+1} で割り切れる整数は p^m でも割り切れるので，求める個数は

$p^{n+1-m} - p^{n+1-(m+1)} = (p-1)p^{n-m}$ （個）

(2) (ⅰ) $0 \leqq m \leqq n$ を満たす m に対して，x が p^m で割り切れ p^{m+1} で割り切れないとき

(1)よりそのような x は $(p-1)p^{n-m}$ 個ある。

xy が p^{n+1} で割り切れるのは，y が p^{n+1-m} で割り切れるときで，そのような y は,

各々の x に対して，$p^{n+1-(n+1-m)} = p^m$ （個）ある。

(ⅱ) x が p^{n+1} で割り切れるとき

そのような x は $x = p^{n+1}$ の 1 個だけであり，y は何でもよいから p^{n+1} 個ある。

したがって，求める組の個数は

$$\sum_{m=0}^{n}\{(p-1)p^{n-m}\cdot p^m\} + 1\cdot p^{n+1} = (n+1)(p-1)p^n + p^{n+1}$$

$$= \{(n+2)p-(n+1)\}p^n \quad （個）$$ である。

[東京工業大学 2007 年前期 $\boxed{2}$]

正数 a に対して，放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線を，A を中心に -30° 回転した直線を ℓ とする。ℓ と $y=x^2$ との交点で A でない方を B とする。さらに点 $(a,\ 0)$ を C，原点を O とする。

(1) ℓ の式を求めよ。

(2) 線分 OC, CA と $y=x^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$，線分 AB と $y=x^2$ で囲まれる部分の面積を $T(a)$ とする。このとき $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{T(a)}{S(a)}$ を求めよ。

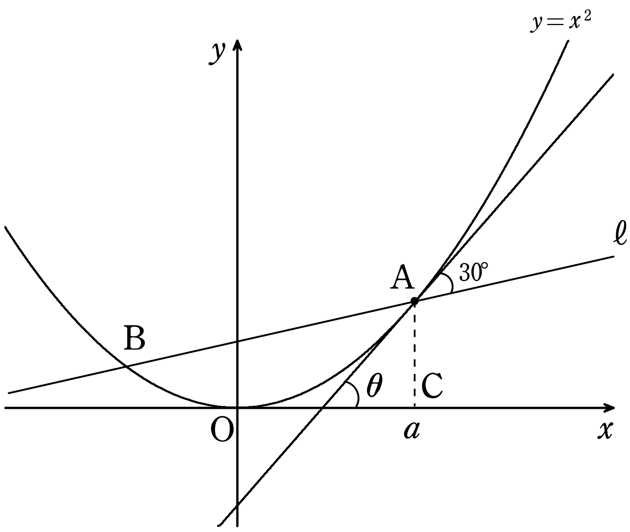
(1) $y=x^2$ より $y'=2x$ である。

点 A における接線と x 軸とのなす角を θ とすれば，$\tan\theta=2a$ である。

ℓ の傾きは $\tan(\theta-30^\circ)=\dfrac{\tan\theta-\tan 30^\circ}{1+\tan\theta\cdot\tan 30^\circ}$

$$=\frac{2a-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1+2a\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}$$ であるから



ℓ の方程式は $y=\dfrac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}(x-a)+a^2$ …①

(2) $S(a)=\displaystyle\int_0^a x^2\,dx=\frac{1}{3}a^3$ …②

$g(x)=\dfrac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}(x-a)+a^2$ とおき，点 B の x 座標を b とすると

$$x^2=g(x)\ \Leftrightarrow\ x^2=\frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}(x-a)+a^2$$

$$\Leftrightarrow\ x^2-\frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}(x-a)-a^2=0$$ の 2 解が $a,\ b$ であるので

解と係数の関係より $a+b=\dfrac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}$

すなわち $b=\dfrac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}-a$ …③

また，$T(a)=\displaystyle\int_b^a \{g(x)-x^2\}\,dx$

$$=\int_b^a -(x-a)(x-b)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\left(a-b\right)^3$$ …④ であるから

②，④より $\dfrac{T(a)}{S(a)}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{b}{a}\right)^3$ であり，

③より $\dfrac{b}{a}=\dfrac{2\sqrt{3}-\dfrac{1}{a}}{2+\sqrt{3}}-1$ であるから $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{b}{a}=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{2\sqrt{3}-\dfrac{1}{a}}{2+\sqrt{3}}-1\right)=-1$ となるので

$$\lim_{a\to\infty}\frac{T(a)}{S(a)}=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{a}\right)^3$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}\left\{1-(-1)\right\}^3$$

$$=4$$

[注] 上記の解答は，$\dfrac{b}{a}$ の極限を求める形にして工夫することにより計算量を減らしているが，後半は

次のように a のみの式にして計算してもよい。

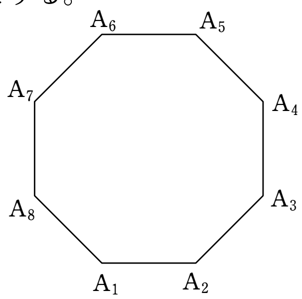
$T(a)=\dfrac{1}{6}\left(a-b\right)^3=\dfrac{1}{6}\left\{a-\left(\dfrac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}-a\right)\right\}^3=\dfrac{1}{6}\left(2a-\dfrac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}\right)^3=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{4a^2+1}{2a+\sqrt{3}}\right)^3$ なので

$$\lim_{a\to\infty}\frac{T(a)}{S(a)}=\lim_{a\to\infty}\frac{\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{4a^2+1}{2a+\sqrt{3}}\right)^3}{\dfrac{1}{3}a^3}=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4a^2+1}{2a+\sqrt{3}}\right)^3\cdot\frac{1}{a^3}=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4a^2+1}{2a^2+\sqrt{3}a}\right)^3$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4+\dfrac{1}{a^2}}{2+\dfrac{\sqrt{3}}{a}}\right)^3=\frac{1}{2}\cdot 2^3=4$$

[東京工業大学 2007 年前期 $\boxed{3}$]

一辺の長さが 1 の正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ の周上を 3 点 P, Q, R が動くとする。



(1) △PQR の面積の最大値を求めよ。

(2) Q が正八角形の頂点 A_1 に一致し，$\angle PQR = 90^\circ$ となるとき

△PQR の面積の最大値を求めよ。

---

(1) △PQR の 1 つの頂点（仮に P とする）を通り，対辺に平行な直線 ℓ が正八角形の内部を通るとすると，正八角形の周上の点で ℓ に関して辺 QR と反対側にあるものが存在する。そのような点の 1 つを P′ とすると，△PQR <△P′QR となるから△PQR の面積は最大でない。

したがって「△PQR の面積が最大のとき，ℓ は正八角形の内部を通らない。」…①

　また，①のとき ℓ と正八角形の周の共通部分は正八角形の 1 頂点または 1 辺であるが，後者のとき，点 P をその辺上で動かしても△PQR の面積は変化しない。

　よって，△PQR の面積の最大値を求めるには，P, Q, R が正八角形の頂点にあるときを考えればよく，そのとき，△PQR の形は次の 5 種類である。

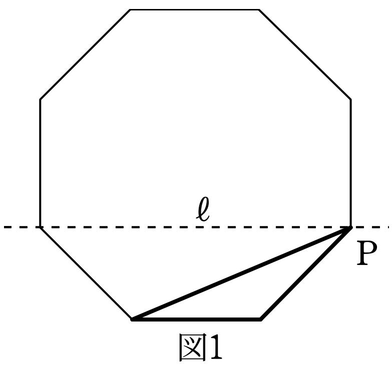


図1

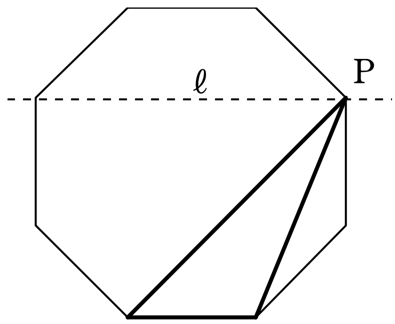


図2

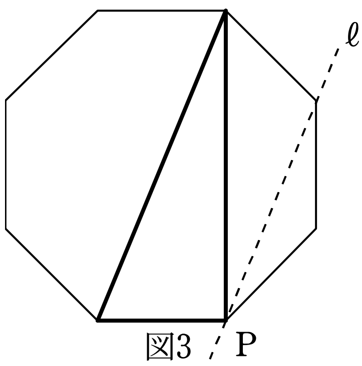


図3

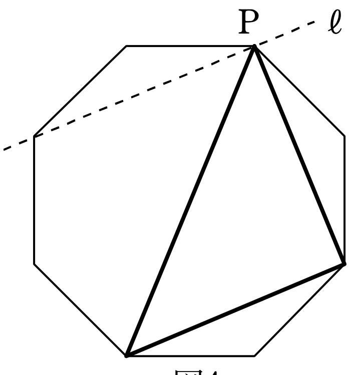


図4

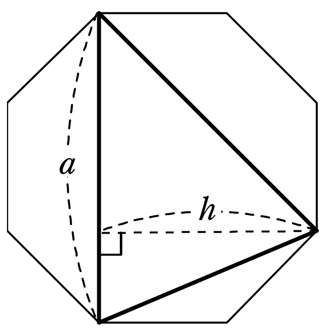
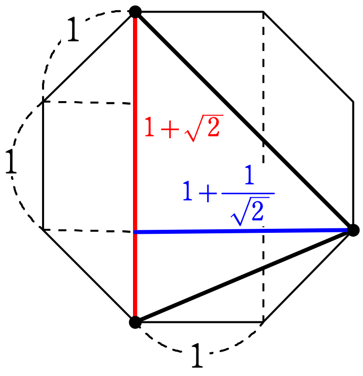


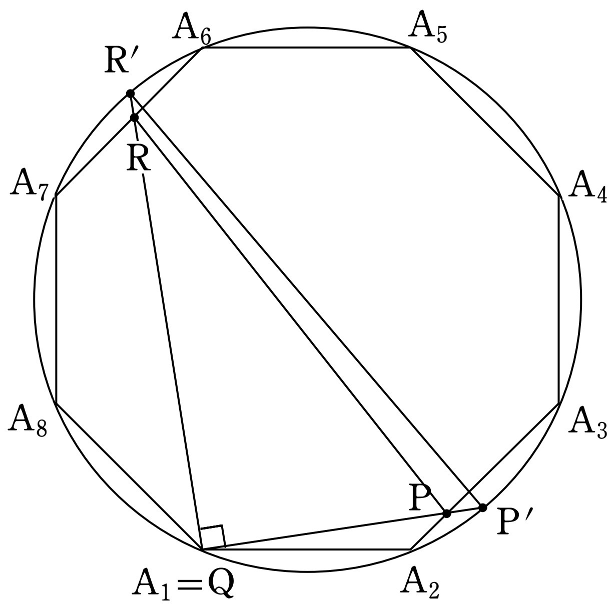
図5

このうち，図 1～図 4 は①を満たさないから，図 5 の三角形の面積が求める最大値であり，



$$\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{4+3\sqrt{2}}{4}$$

(2) 正八角形の外接円を C とする。



直線 QP, QR と C の交点のうち Q 以外のものをそれぞれ P′, R′ とすると，

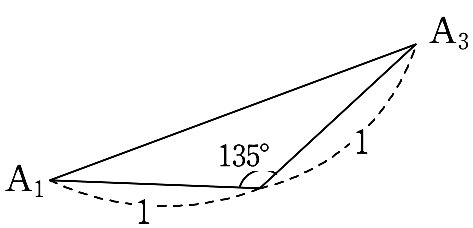
$\triangle \mathrm{PQR} \leqq \triangle \mathrm{P'QR'}$

ここで，P′R′，$\mathrm{A_3A_7}$ はともに C の直径であり，$\mathrm{A_1}$ は $\overset{\frown}{\mathrm{A_3A_7}}$ の中点であるから，

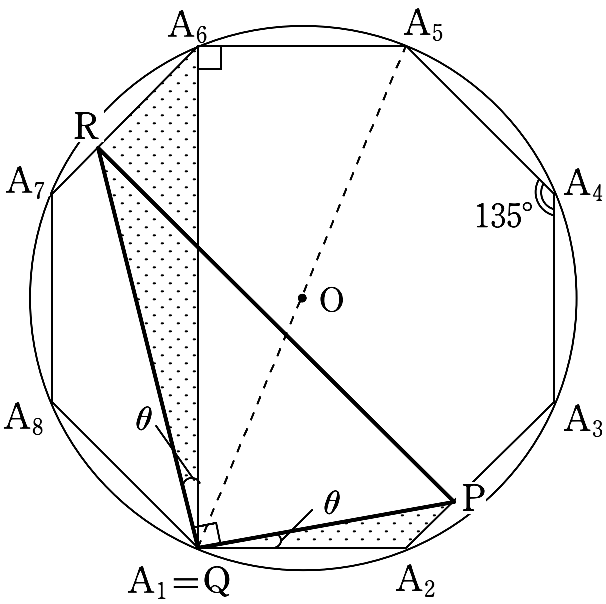
$\triangle \mathrm{P'QR'} \leqq \triangle \mathrm{A_3A_1A_7}$

よって $\triangle \mathrm{PQR} \leqq \triangle \mathrm{A_3A_1A_7}$ であり，求める最大値は

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{A_3A_1A_7} &= \frac{1}{2}\mathrm{A_1A_3}^2\\ &= \frac{1}{2}(1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cos135^\circ)\\ &= \frac{2+\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$



[別解] (2)は次のように計算で求めることもできる。



図において $\angle A_2QP=\theta$ とすると，$\angle A_6QR=\theta$ である。

$0^\circ \leqq \theta \leqq \dfrac{45^\circ}{2}$ であり，$\triangle A_2QP$ と $\triangle A_6QR$ に対し，

正弦定理より $\dfrac{PQ}{\sin\angle PA_2Q}=\dfrac{QA_2}{\sin\angle A_2PQ} \Leftrightarrow \dfrac{PQ}{\sin 135^\circ}=\dfrac{1}{\sin(45^\circ-\theta)}$ …①

$\dfrac{QR}{\sin\angle QA_6R}=\dfrac{QA_6}{\sin\angle QRA_6} \Leftrightarrow \dfrac{QR}{\sin 45^\circ}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sin(135^\circ-\theta)}$ …② が成り立つ。

①より $PQ=\dfrac{\sin 135^\circ}{\sin(45^\circ-\theta)}$

$=\dfrac{\sin 135^\circ}{\sin 45^\circ\cos\theta-\cos 45^\circ\sin\theta}$

$=\dfrac{1}{\cos\theta-\sin\theta}$

②より $QR=\dfrac{\sin 45^\circ}{\sin(135^\circ-\theta)}\times\left(1+\sqrt{2}\right)$

$=\dfrac{\sin 135^\circ}{\sin 135^\circ\cos\theta-\cos 135^\circ\sin\theta}\times\left(1+\sqrt{2}\right)$

$=\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\left(1+\sqrt{2}\right)$

$0^\circ \leqq 2\theta \leqq 45^\circ$ であるから

$\triangle PQR=\dfrac{1}{2}PQ\cdot QR$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos\theta-\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1+\sqrt{2}}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{1+\sqrt{2}}{2\cos 2\theta}\leqq\frac{1+\sqrt{2}}{2\times\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

等号成立は $2\theta=90^\circ$ すなわち $\theta=\frac{45^\circ}{2}$ のとき。

よって，△PQR の面積の最大値は $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

［ 東京工業大学 2007 年前期 $\boxed{4}$ ］

(1) 整数 $n=0,1,2,\cdots$ と正数 a_n に対して

$$f_n(x)=a_n(x-n)(n+1-x)$$

とおく。2 つの曲線 $y=f_n(x)$ と $y=e^{-x}$ が接するような a_n を求めよ。

(2) $f_n(x)$ は(1)で定めたものとする。$y=f_0(x),\ y=e^{-x}$ と y 軸で囲まれる図形の面積を S_0，$n\geqq 1$ に対し $y=f_{n-1}(x),\ y=f_n(x)$ と $y=e^{-x}$ で囲まれる図形の面積を S_n とおく。

このとき $\lim_{n\to\infty}(S_0+S_1+\cdots+S_n)$ を求めよ。

(1) $g(x)=e^{-x}$ とおく。

$y=f_n(x)=-a_n(x-n)\{x-(n+1)\}=-a_n\{x^2-(2n+1)x+n(n+1)\}$ であり，

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=t$ で接する条件は

$\begin{cases} f_n(t)=g(t) \\ f_n'(t)=g'(t) \end{cases}$ であり $f_n'(x)=-a_n\{2x-(2n+1)\}$，$g'(x)=-e^{-x}$ であるから

$\begin{cases} -a_n\{t^2-(2n+1)t+n(n+1)\}=e^{-t} \quad \cdots① \\ -a_n\{2t-(2n+1)\}=-e^{-t} \quad \cdots② \end{cases}$ となる。

①，②より $a_n\{t^2-(2n+1)t+n(n+1)\}=-a_n\{2t-(2n+1)\}$

$a_n>0$ より $t^2-(2n+1)t+n(n+1)=-\{2t-(2n+1)\}$

よって $t^2-(2n-1)t+n^2-n-1=0$

これを解くと $t=\dfrac{2n-1\pm\sqrt{(2n-1)^2-4(n^2-n-1)}}{2}=\dfrac{2n-1\pm\sqrt{5}}{2}=n+\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

接点の x 座標について $n<t<n+1$ であるから $t=n+\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

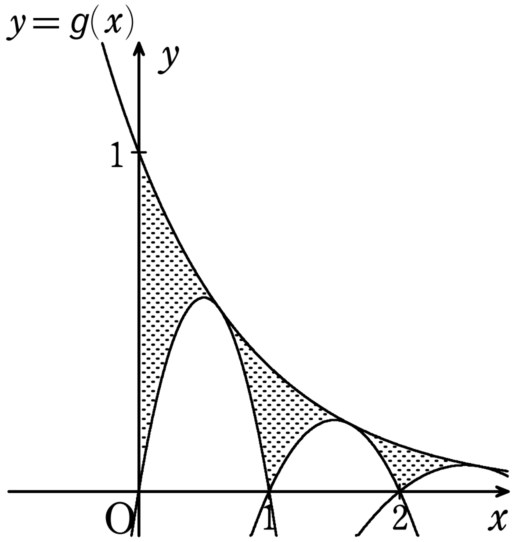
このとき②より $-a_n\left\{2\cdot\left(n+\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)-(2n+1)\right\}=-e^{-\left(n+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}$ であり，

$(\sqrt{5}-2)a_n=e^{-n+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ から $a_n=(\sqrt{5}+2)e^{-n+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ を得る。

(2) 正の整数nに対し，

y軸，$y=g(x)$，$y=f_n(x)$，$x=n$で囲まれる部分の

面積をT_nとする。



このとき $T_n<S_0+S_1+\cdots+S_n<T_{n+1}$ であり

$$T_n=\int_0^n g(x)\,dx-\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} f_k(x)\,dx$$

$$=\left[-e^{-x}\right]_0^n-\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\left[-a_k(x-k)\{x-(k+1)\}\right]dx$$

$$=\left[-e^{-x}\right]_0^n-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{6}\{(k+1)-k\}^3$$

$$=-e^{-n}+1-\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n-1}a_k$$

ここで，$a_n=(\sqrt{5}+2)e^{-n+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$

$$=(\sqrt{5}+2)e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\cdot e^{-n}$$

$$=(\sqrt{5}+2)e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^n$$ であり，a_nは等比数列である。$0<\frac{1}{e}<1$であるから

無限等比級数は収束するので

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\left(-e^{-n}+1-\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n}a_k\right)=0+1-\frac{1}{6}\cdot\frac{(\sqrt{5}+2)e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}}{1-\frac{1}{e}}=1-\frac{(\sqrt{5}+2)e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}{6(e-1)}$$ となる。

$\lim_{n\to\infty}T_{n+1}$ についても同じ値に収束するので，はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_0+S_1+\cdots+S_n\right)=1-\frac{(\sqrt{5}+2)e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}{6(e-1)}$$ である。