[東京工業大学 2007 年前期 $\boxed{1}$]

☆ ☆

p を素数，n を 0 以上の整数とする。

(1) m は整数で $0 \leqq m \leqq n$ とする。1 から p^{n+1} までの整数の中で，p^m で割り切れ p^{m+1} で割り切れないものの個数を求めよ。

(2) 1 から p^{n+1} までの 2 つの整数 x, y に対し，その積 xy が p^{n+1} で割り切れるような組 (x, y) の個数を求めよ。

☆ ☆

[東京工業大学 2007 年前期 $\boxed{2}$]

☆ ☆

正数 a に対して，放物線 $y = x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線を，A を中心に -30° 回転した直線を ℓ とする。ℓ と $y = x^2$ との交点で A でない方を B とする。さらに点 $(a,\ 0)$ を C，原点を O とする。

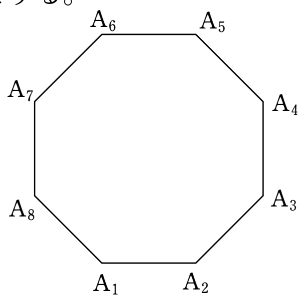
(1) ℓ の式を求めよ。

(2) 線分 OC, CA と $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$，線分 AB と $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を $T(a)$ とする。このとき $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{T(a)}{S(a)}$ を求めよ。

☆ ☆

[東京工業大学 2007 年前期 $\boxed{3}$]

一辺の長さが 1 の正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ の周上を 3 点 P, Q, R が動くとする。



(1) $\triangle$PQR の面積の最大値を求めよ。

(2) Q が正八角形の頂点 A_1 に一致し，$\angle PQR = 90^\circ$ となるとき

$\triangle$PQR の面積の最大値を求めよ。

[東京工業大学 2007 年前期 $\boxed{4}$]

☆ ☆

(1) 整数 $n=0, 1, 2, \cdots$ と正数 a_n に対して

$$f_n(x)=a_n(x-n)(n+1-x)$$

とおく。2 つの曲線 $y=f_n(x)$ と $y=e^{-x}$ が接するような a_n を求めよ。

(2) $f_n(x)$ は(1)で定めたものとする。$y=f_0(x),\ y=e^{-x}$ と y 軸で囲まれる図形の面積を S_0， $n \geqq 1$ に対し $y=f_{n-1}(x),\ y=f_n(x)$ と $y=e^{-x}$ で囲まれる図形の面積を S_n とおく。

このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(S_0+S_1+\cdots+S_n)$ を求めよ。

☆ ☆