[東京工業大学 2007年前期 $\boxed{4}$]

---

(1) 整数 $n=0,1,2,\cdots$ と正数 a_n に対して

$$f_n(x)=a_n(x-n)(n+1-x)$$

とおく。2つの曲線 $y=f_n(x)$ と $y=e^{-x}$ が接するような a_n を求めよ。

(2) $f_n(x)$ は(1)で定めたものとする。$y=f_0(x),\ y=e^{-x}$ と y 軸で囲まれる図形の面積を S_0, $n≧1$ に対し $y=f_{n-1}(x),\ y=f_n(x)$ と $y=e^{-x}$ で囲まれる図形の面積を S_n とおく。

このとき $\lim_{n\to\infty}(S_0+S_1+\cdots+S_n)$ を求めよ。

---

(1) $g(x)=e^{-x}$ とおく。

$y=f_n(x)=-a_n(x-n)\{x-(n+1)\}=-a_n\{x^2-(2n+1)x+n(n+1)\}$ であり,

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=t$ で接する条件は

$\begin{cases} f_n(t)=g(t) \\ f_n'(t)=g'(t) \end{cases}$ であり $f_n'(x)=-a_n\{2x-(2n+1)\}$, $g'(x)=-e^{-x}$ であるから

$\begin{cases} -a_n\{t^2-(2n+1)t+n(n+1)\}=e^{-t} \cdots ① \\ -a_n\{2t-(2n+1)\}=-e^{-t} \cdots ② \end{cases}$ となる。

①, ②より $a_n\{t^2-(2n+1)t+n(n+1)\}=-a_n\{2t-(2n+1)\}$

$a_n>0$ より $t^2-(2n+1)t+n(n+1)=-\{2t-(2n+1)\}$

よって $t^2-(2n-1)t+n^2-n-1=0$

これを解くと $t=\dfrac{2n-1\pm\sqrt{(2n-1)^2-4(n^2-n-1)}}{2}=\dfrac{2n-1\pm\sqrt{5}}{2}=n+\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

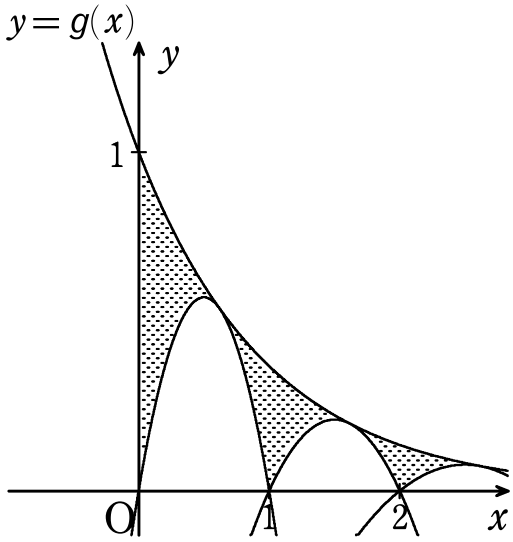
接点の x 座標について $n<t<n+1$ であるから $t=n+\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

このとき②より $-a_n\left\{2\cdot\left(n+\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)-(2n+1)\right\}=-e^{-\left(n+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}$ であり,

$(\sqrt{5}-2)a_n=e^{-n+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ から $a_n=(\sqrt{5}+2)e^{-n+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ を得る。

(2) 正の整数nに対し，

y軸，$y=g(x)$，$y=f_n(x)$，$x=n$で囲まれる部分の面積をT_nとする。



このとき $T_n < S_0+S_1+\cdots+S_n < T_{n+1}$ であり

$$T_n=\int_0^n g(x)\,dx-\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} f_k(x)\,dx$$

$$=\left[-e^{-x}\right]_0^n-\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\left[-a_k(x-k)\{x-(k+1)\}\right]dx$$

$$=\left[-e^{-x}\right]_0^n-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{6}\{(k+1)-k\}^3$$

$$=-e^{-n}+1-\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n-1}a_k$$

ここで，$a_n=(\sqrt{5}+2)e^{-n+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$

$$=(\sqrt{5}+2)e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\cdot e^{-n}$$

$=(\sqrt{5}+2)e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\cdot\left(\dfrac{1}{e}\right)^n$ であり，a_nは等比数列である。$0<\dfrac{1}{e}<1$であるから

無限等比級数は収束するので

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\left(-e^{-n}+1-\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n}a_k\right)=0+1-\frac{1}{6}\cdot\frac{(\sqrt{5}+2)e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}}{1-\frac{1}{e}}=1-\frac{(\sqrt{5}+2)e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}{6(e-1)}$ となる。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_{n+1}$ についても同じ値に収束するので，はさみうちの原理から

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(S_0+S_1+\cdots+S_n\right)=1-\frac{(\sqrt{5}+2)e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}{6(e-1)}$ である。