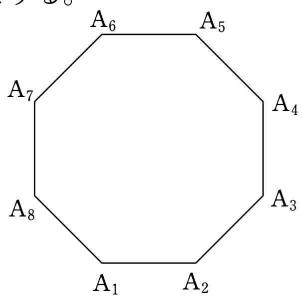
[東京工業大学 2007 年前期 $\boxed{3}$]

一辺の長さが 1 の正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ の周上を 3 点 P, Q, R が動くとする。



(1) △PQR の面積の最大値を求めよ。

(2) Q が正八角形の頂点 A_1 に一致し，$\angle PQR = 90^\circ$ となるとき

△PQR の面積の最大値を求めよ。

(1) △PQR の 1 つの頂点（仮に P とする）を通り，対辺に平行な直線 ℓ が正八角形の内部を通るとすると，正八角形の周上の点で ℓ に関して辺 QR と反対側にあるものが存在する。そのような点の 1 つを P′ とすると，△PQR < △P′QR となるから△PQR の面積は最大でない。

したがって「△PQR の面積が最大のとき，ℓ は正八角形の内部を通らない。」…①

また，①のとき ℓ と正八角形の周の共通部分は正八角形の 1 頂点または 1 辺であるが，後者のとき，点 P をその辺上で動かしても△PQR の面積は変化しない。

よって，△PQR の面積の最大値を求めるには，P, Q, R が正八角形の頂点にあるときを考えればよく，そのとき，△PQR の形は次の 5 種類である。

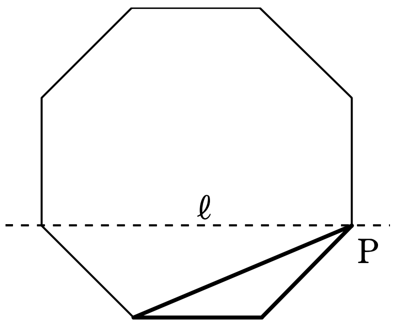


図1

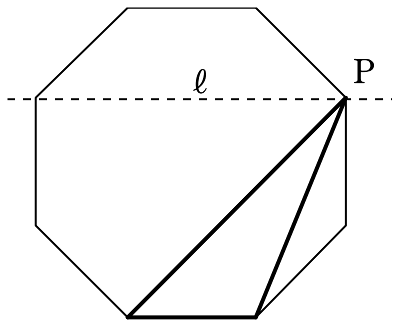


図2

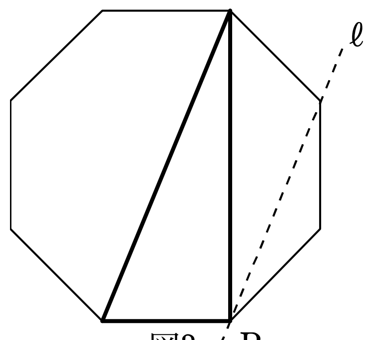


図3

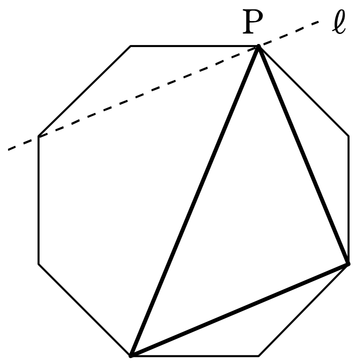


図4

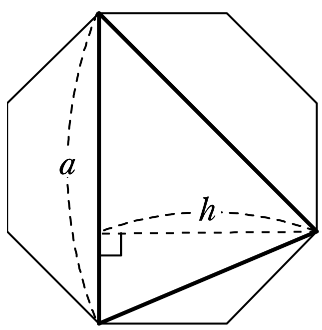
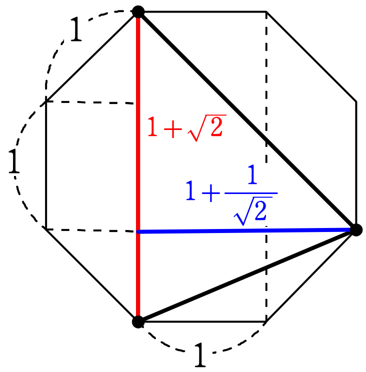


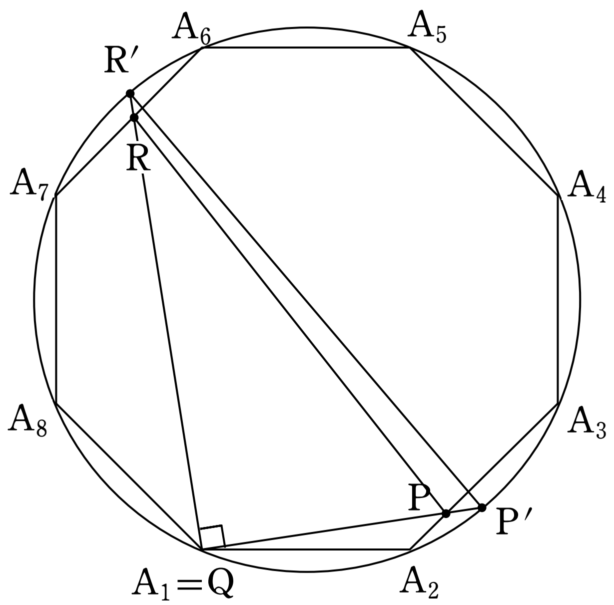
図5

このうち，図 1～図 4 は①を満たさないから，図 5 の三角形の面積が求める最大値であり，



$$\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{4+3\sqrt{2}}{4}$$

(2) 正八角形の外接円を C とする。



直線QP, QR と C の交点のうち Q 以外のものをそれぞれ P´, R´ とすると，

$\triangle PQR \leqq \triangle P'QR'$

ここで， P´R´， A_3A_7 はともに C の直径であり， A_1 は $\overset{\frown}{A_3A_7}$ の中点であるから，

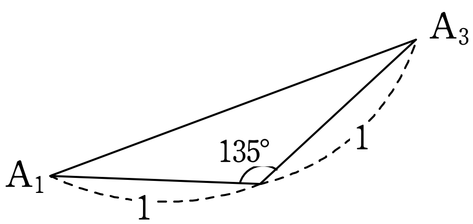
$\triangle P'QR' \leqq \triangle A_3A_1A_7$

よって $\triangle PQR \leqq \triangle A_3A_1A_7$ であり，求める最大値は

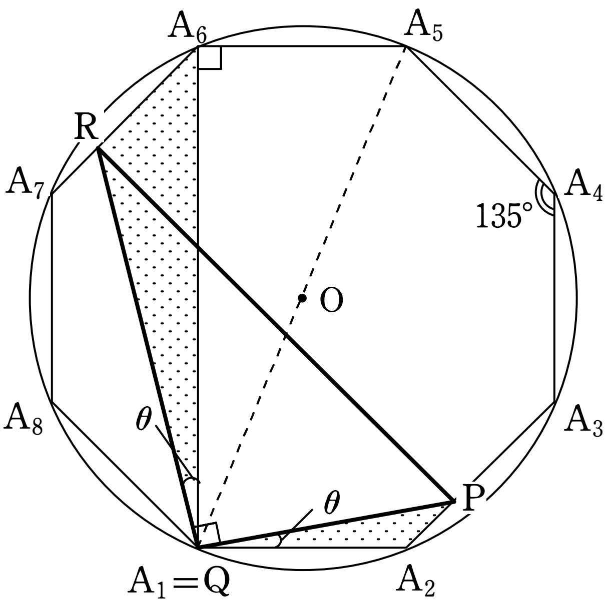
$$\triangle A_3A_1A_7=\frac{1}{2}\ A_1A_3{}^2$$

$$=\frac{1}{2}(1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cos135^\circ)$$

$$=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$



[別解] (2)は次のように計算で求めることもできる。



図において $\angle A_2QP=\theta$ とすると，$\angle A_6QR=\theta$ である。

$0^\circ \leqq \theta \leqq \dfrac{45^\circ}{2}$ であり，$\triangle A_2QP$ と $\triangle A_6QR$ に対し，

正弦定理より $\dfrac{PQ}{\sin\angle PA_2Q}=\dfrac{QA_2}{\sin\angle A_2PQ} \Leftrightarrow \dfrac{PQ}{\sin 135^\circ}=\dfrac{1}{\sin(45^\circ-\theta)}$ …①

$\dfrac{QR}{\sin\angle QA_6R}=\dfrac{QA_6}{\sin\angle QRA_6} \Leftrightarrow \dfrac{QR}{\sin 45^\circ}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sin(135^\circ-\theta)}$ …② が成り立つ。

①より $PQ=\dfrac{\sin 135^\circ}{\sin(45^\circ-\theta)}$

$=\dfrac{\sin 135^\circ}{\sin 45^\circ\cos\theta-\cos 45^\circ\sin\theta}$

$=\dfrac{1}{\cos\theta-\sin\theta}$

②より $QR=\dfrac{\sin 45^\circ}{\sin(135^\circ-\theta)}\times\left(1+\sqrt{2}\right)$

$=\dfrac{\sin 135^\circ}{\sin 135^\circ\cos\theta-\cos 135^\circ\sin\theta}\times\left(1+\sqrt{2}\right)$

$=\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\left(1+\sqrt{2}\right)$

$0^\circ \leqq 2\theta \leqq 45^\circ$ であるから

$\triangle PQR=\dfrac{1}{2}PQ\cdot QR$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos\theta-\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1+\sqrt{2}}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{1+\sqrt{2}}{2\cos 2\theta} \leqq \frac{1+\sqrt{2}}{2\times\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

等号成立は $2\theta=90^\circ$ すなわち $\theta=\frac{45^\circ}{2}$ のとき。

よって，△PQR の面積の最大値は $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$