[東京工業大学 2007 年前期 $\boxed{2}$]

正数aに対して，放物線$y=x^2$上の点A$(a,\ a^2)$における接線を，Aを中心に-30°回転した直線をℓとする。ℓと$y=x^2$との交点でAでない方をBとする。さらに点$(a,\ 0)$をC，原点をOとする。

(1) ℓの式を求めよ。

(2) 線分OC, CAと$y=x^2$で囲まれる部分の面積を$S(a)$，線分ABと$y=x^2$で囲まれる部分の面積を$T(a)$とする。このとき$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{T(a)}{S(a)}$を求めよ。

---

(1) $y=x^2$ より $y'=2x$ である。

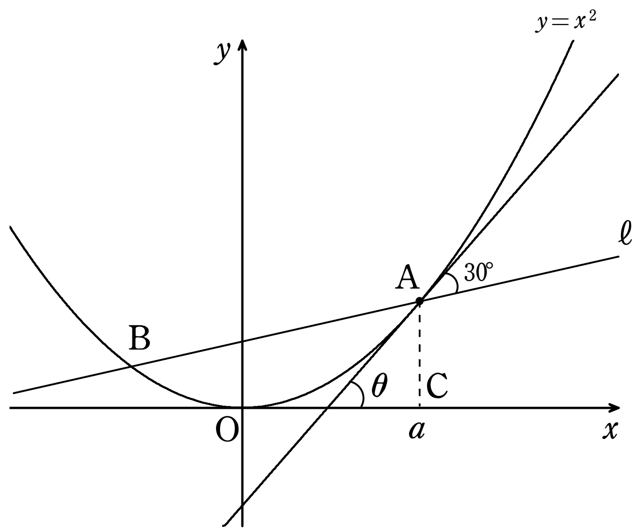
点Aにおける接線とx軸とのなす角をθとすれば，$\tan\theta=2a$ である。

ℓの傾きは

$$\tan(\theta-30^\circ)=\frac{\tan\theta-\tan 30^\circ}{1+\tan\theta\cdot\tan 30^\circ}$$

$$=\frac{2a-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1+2a\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}$$ であるから



ℓの方程式は $y=\dfrac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}(x-a)+a^2$ …①

(2) $S(a)=\displaystyle\int_0^a x^2\,dx=\frac{1}{3}a^3$ …②

$g(x)=\dfrac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}(x-a)+a^2$ とおき，点Bのx座標をbとすると

$$x^2=g(x)\iff x^2=\frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}(x-a)+a^2$$

$$\iff x^2-\frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}(x-a)-a^2=0$$ の 2 解が$a,\ b$であるので

解と係数の関係より $a+b=\dfrac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}$

すなわち $b=\dfrac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}-a$ …③

また，$T(a)=\displaystyle\int_b^a \{g(x)-x^2\}\,dx$

$$=\int_b^a -(x-a)(x-b)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(a-b)^3 \quad \cdots④$$ であるから

②，④より $\dfrac{T(a)}{S(a)}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{b}{a}\right)^3$ であり，

③より $\dfrac{b}{a}=\dfrac{2\sqrt{3}-\dfrac{1}{a}}{2+\sqrt{3}}-1$ であるから $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{b}{a}=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{2\sqrt{3}-\dfrac{1}{a}}{2+\sqrt{3}}-1\right)=-1$ となるので

$$\lim_{a\to\infty}\frac{T(a)}{S(a)}=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{a}\right)^3$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}\{1-(-1)\}^3$$

$$=4$$

[注] 上記の解答は，$\dfrac{b}{a}$ の極限を求める形にして工夫することにより計算量を減らしているが，後半は次のように a のみの式にして計算してもよい。

$$T(a)=\frac{1}{6}(a-b)^3=\frac{1}{6}\left\{a-\left(\frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}-a\right)\right\}^3=\frac{1}{6}\left(2a-\frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}\right)^3=\frac{1}{6}\left(\frac{4a^2+1}{2a+\sqrt{3}}\right)^3$$ なので

$$\lim_{a\to\infty}\frac{T(a)}{S(a)}=\lim_{a\to\infty}\frac{\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{4a^2+1}{2a+\sqrt{3}}\right)^3}{\dfrac{1}{3}a^3}=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4a^2+1}{2a+\sqrt{3}}\right)^3\cdot\frac{1}{a^3}=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4a^2+1}{2a^2+\sqrt{3}a}\right)^3$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4+\dfrac{1}{a^2}}{2+\dfrac{\sqrt{3}}{a}}\right)^3=\frac{1}{2}\cdot 2^3=4$$