[東京工業大学 2007 年前期 $\boxed{1}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――☆

p を素数，n を 0 以上の整数とする。

(1) m は整数で $0 \leqq m \leqq n$ とする。1 から p^{n+1} までの整数の中で，p^m で割り切れ p^{m+1} で割り切れないものの個数を求めよ。

(2) 1 から p^{n+1} までの 2 つの整数 $x,\ y$ に対し，その積 xy が p^{n+1} で割り切れるような組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) $0 \leqq m \leqq n$ のとき，1 から p^{n+1} までの整数の中で p^m で割り切れるものは，$\dfrac{p^{n+1}}{p^m} = p^{n-1-m}$ より

$1\times p^m,\ 2\times p^m,\ 3\times p^m,\ \cdots,\ p\times p^m,\ \cdots,\ p^2\times p^m,\ \cdots,\ p^{n+1-m}\times p^m$ …① なので p^{n+1-m} （個）ある。

また，p^{m+1} で割り切れるものは，

$1\times p^{m+1},\ 2\times p^{m+1},\ 3\times p^{m+1},\ \cdots,\ p^{n-m}\times p^{m+1}$ なので p^{n-m} （個）ある。

これらは，$p\times p^m,\ 2p\times p^m,\ 3p\times p^m,\ \cdots,\ p^{n-m+1}\times p^m$ と表されるので，①にすべて含まれる。

すなわち，p^{m+1} で割り切れる整数は p^m でも割り切れるので，求める個数は

$p^{n+1-m} - p^{n-m} = (p-1)p^{n-m}$ （個）

(2) (ⅰ) $x = p^{n+1}$ のとき

y が1から p^{n+1} までのどの整数であっても積 xy が p^{n+1} で割り切れるので，組 $(x,\ y)$ の個数は p^{n+1} （個）である。

(ⅱ) $x = p^m$ （$0 \leqq m \leqq n$）のとき

x が p^m で割り切れるが p^{m+1} では割り切れず，積 xy が p^{n+1} で割り切れる条件は，

「y が p^{n+1-m} で割り切れること」である。

p^m で割り切れるが p^{m+1} では割り切れない x の個数は，(1)より $(p-1)p^{n-m}$ （個）あり，

y は，$1\times p^{n+1-m},\ 2\times p^{n+1-m},\ 3\times p^{n+1-m},\ \cdots,\ p^m\times p^{n+1-m}$ なので p^m （個）ある。

よって，このときの組 $(x,\ y)$ の個数は $(p-1)p^{n-m}\cdot p^m = (p-1)p^n$ （個）となる。

(ⅰ)(ⅱ)より積 xy が p^{n+1} で割り切れるような組 $(x,\ y)$ の個数は

$$p^{n+1} + \sum_{m=0}^{n}(p-1)p^n = p^{n+1} + (n+1)(p-1)p^n = \{(n+2)p-(n+1)\}p^n \text{（個）}$$

[別解]

(1) $0 \leqq k \leqq n+1$ を満たす整数 k に対して，

1 から p^{n+1} までの整数の中で p^k で割り切れるものは $\dfrac{p^{n+1}}{p^k} = p^{n+1-k}$ 個ある。

p^{m+1} で割り切れる整数は p^m でも割り切れるので，求める個数は

$p^{n+1-m} - p^{n+1-(m+1)} = (p-1)p^{n-m}$ （個）

(2)（ⅰ）$0 \leqq m \leqq n$ を満たす m に対して，x が p^m で割り切れ p^{m+1} で割り切れないとき

(1)よりそのような x は $(p-1)p^{n-m}$ 個ある。

xy が p^{n+1} で割り切れるのは，y が p^{n+1-m} で割り切れるときで，そのような y は，

各々の x に対して，$p^{n+1-(n+1-m)} = p^m$ （個）ある。

（ⅱ）x が p^{n+1} で割り切れるとき

そのような x は $x = p^{n+1}$ の 1 個だけであり，y は何でもよいから p^{n+1} 個ある。

したがって，求める組の個数は

$$\sum_{m=0}^{n} \{(p-1)p^{n-m} \cdot p^m\} + 1 \cdot p^{n+1} = (n+1)(p-1)p^n + p^{n+1}$$

$$= \{(n+2)p - (n+1)\}p^n \quad \text{（個）}$$ である。