

[東京工業大学 2006 年後期 1]



a, b を正の数とする。 xy 座標平面において、楕円 $ax^2 + by^2 = 1$ の第 4 象限 ($x \geq 0, y \leq 0$) に含まれる部分を C 、傾き $t \geq 0$ の半直線 $y = tx$ ($x \geq 0$) を l_t とする。 l_t 上の点 P と C 上の点 P' を結ぶ線分 PP' が y 軸に平行になるように動くとき、線分 PP' の長さを最大にする P を P_t で表し、 $t \geq 0$ が変化するとき P_t が描く曲線を C' とする。また、楕円 $ax^2 + by^2 = 1$ と C' との交点を $Q(\alpha, \beta)$ とする。

(1) 曲線 C' の方程式 $y = f(x)$ を求めよ。

(2) α と β を求めよ。

(3) 直線 $y = \beta$ 、曲線 C' および y 軸が囲む領域を D とする。 D を y 軸の回りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。



(1) C は下に凸であるから、 PP' の長さが最大になるのは

P' における C の接線が l_t と平行なときである。

そのとき、 $P'(X, Y)$ とおくと、 $Y = -\sqrt{\frac{1-aX^2}{b}}$ であり、

接線 $aXx + bYy = 1$ の傾きが t なので

$$t = -\frac{aX}{bY} = \frac{aX}{b\sqrt{\frac{1-aX^2}{b}}} = \frac{aX}{\sqrt{b(1-aX^2)}}$$

となる。

$P_t(x, y)$ とおくと、

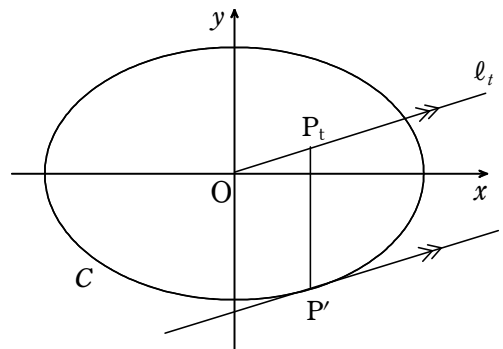
$$x = X, y = tX = \frac{aX^2}{\sqrt{b(1-aX^2)}}$$

であるから C' の方程式は

$$y = \frac{ax^2}{\sqrt{b(1-ax^2)}} \quad \dots \textcircled{1} \quad \left(0 \leq x < \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$$

(2) $ax^2 + by^2 = 1$ と $\textcircled{1}$ を連立させて

$$ax^2 + \frac{a^2x^4}{1-ax^2} = 1 \quad \text{より} \quad ax^2 = 1 - ax^2$$



$$\text{よって } ax^2 = \frac{1}{2} \text{ となり } by^2 = 1 - ax^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{したがって } x = \sqrt{\frac{1}{2a}}, y = \sqrt{\frac{1}{2b}} \text{ なので}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2a}}, \beta = \sqrt{\frac{1}{2b}}$$

(3) ①より $by^2(1-ax^2) = (ax^2)^2$ なので

$$(ax^2)^2 + by^2 \cdot ax^2 - by^2 = 0 \text{ から}$$

$$ax^2 = \frac{-by^2 + \sqrt{b^2y^4 + 4by^2}}{2} = \frac{-by^2 + \sqrt{b}y\sqrt{by^2 + 4}}{2}$$

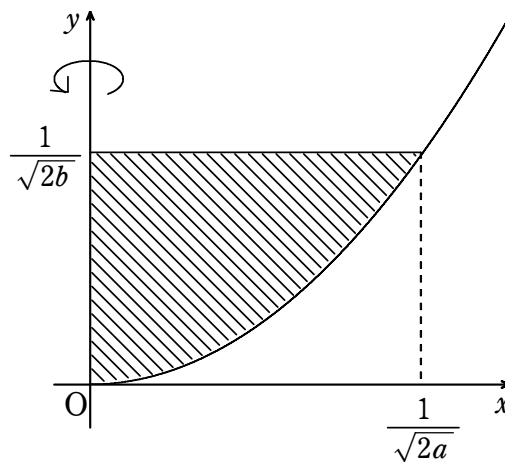
$$\text{したがって } V = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2b}}} \pi x^2 dy$$

$$= \frac{\pi}{2a} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2b}}} (-by^2 + \sqrt{b}y\sqrt{by^2 + 4}) dy$$

$$= \frac{\pi}{2a} \left[-\frac{1}{3}by^3 + \frac{1}{3\sqrt{b}}(by^2 + 4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2b}}}$$

$$= \frac{\pi}{2a} \left(\frac{13\sqrt{2}}{6\sqrt{b}} - \frac{8}{3\sqrt{b}} \right)$$

$$= \left(\frac{13\sqrt{2} - 16}{12a\sqrt{b}} \right) \pi$$





自然数 a, b, c が

$$3a = b^3, 5a = c^2$$

を満たし、 d^6 が a を割り切るような自然数 d は $d = 1$ に限るとする。

- (1) a は 3 と 5 で割り切れることを示せ。
- (2) a の素因数は 3 と 5 以外にないことを示せ。
- (3) a を求めよ。



- (1) $3a = b^3 \cdots \textcircled{1}$, $5a = c^2 \cdots \textcircled{2}$ とする。

①より b^3 は 3 で割り切れるが、3 は素数なので、 b が 3 で割り切れる。

よって①は 3^3 で割り切れるから、 a は 3^2 で割り切れる。したがって、 a は 3 で割り切れる。

また、②より c^2 は 5 で割り切れるが、5 は素数なので、 c が 5 で割り切れる。

よって②は 5^2 で割り切れるから、 a は 5 で割り切れる。

- (2) a が 3 と 5 以外の素因数 p をもつとして、 a の素因数における p の指数を e とする。

①より p は b の素因数であり、 b の素因数分解における p の指数を f とすると $e = 3f$

また、②より p は c の素因数であり、 c の素因数分解における p の指数を g とすると $e = 2g$

よって、 e は 3 でも 2 でも割り切れるから 6 で割り切れる。したがって $e \geq 6$ となるが、

このとき、 a が p^6 で割り切れることになるので、

「 d^6 が a を割り切るような自然数 d は $d = 1$ に限られる」ことに反する。

よって、 a は 3 と 5 以外には素因数をもたない。

- (3) (1), (2)より

$a = 3^m \cdot 5^n$ (m, n は 5 以下の自然数) と表せる。

①より $m+1, n$ はともに 3 で割り切れ、②より $m, n+1$ はともに 2 で割り切れる。

したがって $m = 2, n = 3$ であり、 $a = 3^2 \cdot 5^3 = 1125$ となる。