

[東京工業大学 2006 年後期 1]



a, b を正の数とする。 xy 座標平面において、楕円 $ax^2 + by^2 = 1$ の第 4 象限 ($x \geq 0, y \leq 0$) に含まれる部分を C 、傾き $t \geq 0$ の半直線 $y = tx$ ($x \geq 0$) を l_t とする。 l_t 上の点 P と C 上の点 P' を結ぶ線分 PP' が y 軸に平行になるように動くとき、線分 PP' の長さを最大にする P を P_t で表し、 $t \geq 0$ が変化するとき P_t が描く曲線を C' とする。また、楕円 $ax^2 + by^2 = 1$ と C' との交点を $Q(\alpha, \beta)$ とする。

(1) 曲線 C' の方程式 $y = f(x)$ を求めよ。

(2) α と β を求めよ。

(3) 直線 $y = \beta$ 、曲線 C' および y 軸が囲む領域を D とする。 D を y 軸の回りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。



[東京工業大学 2006 年後期 2]



自然数 a, b, c が

$$3a = b^3, 5a = c^2$$

を満たし、 d^6 が a を割り切るような自然数 d は $d = 1$ に限るとする。

- (1) a は 3 と 5 で割り切れることを示せ。
- (2) a の素因数は 3 と 5 以外にないことを示せ。
- (3) a を求めよ。

