[東京工業大学 2006 年後期 $\boxed{2}$]

☆ ☆

自然数 a, b, c が

$$3a = b^3,\ 5a = c^2$$

を満たし，d^6 が a を割り切るような自然数 d は $d = 1$ に限るとする。

(1) a は 3 と 5 で割り切れることを示せ。

(2) a の素因数は 3 と 5 以外にないことを示せ。

(3) a を求めよ。

☆ ☆

(1) $3a = b^3$ …①，$5a = c^2$ …② とする。

①より b^3 は 3 で割り切れるが，3 は素数なので，b が 3 で割り切れる。

よって①は 3^3 で割り切れるから，a は 3^2 で割り切れる。したがって，a は 3 で割り切れる。

また，②より c^2 は 5 で割り切れるが，5 は素数なので，c が 5 で割り切れる。

よって②は 5^2 で割り切れるから，a は 5 で割り切れる。

(2) a が 3 と 5 以外の素因数 p をもつとして，a の素因数における p の指数を e とする。

①より p は b の素因数であり，b の素因数分解における p の指数を f とすると $e = 3f$

また，②より p は c の素因数であり，c の素因数分解における p の指数を g とすると $e = 2g$

よって，e は 3 でも 2 でも割り切れるから 6 で割り切れる。したがって $e \geqq 6$ となるが，

このとき，a が p^6 で割り切れることになるので，

「d^6 が a を割り切るような自然数 d は $d = 1$ に限られる」ことに反する。

よって，a は 3 と 5 以外には素因数をもたない。

(3) (1)，(2)より

$a = 3^m \cdot 5^n$ （m, n は 5 以下の自然数） と表せる。

①より $m+1, n$ はともに 3 で割り切れ，②より $m, n+1$ はともに 2 で割り切れる。

したがって $m = 2$，$n = 3$ であり，$a = 3^2 \cdot 5^3 = 1125$ となる。