[東京工業大学 2006 年後期 $\boxed{1}$]

☆ ☆

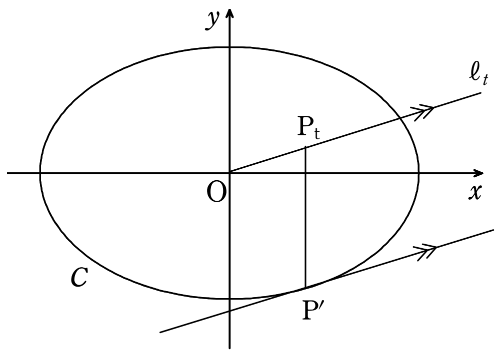
$a,\ b$ を正の数とする。xy 座標平面において，楕円 $ax^2+by^2=1$ の第 4 象限 $(x\geqq 0,\ y\leqq 0)$ に含まれる部分を C，傾き $t\geqq 0$ の半直線 $y=tx\ \ (x\geqq 0)$ を ℓ_t とする。ℓ_t 上の点 P と C 上の点 P′ を結ぶ線分 PP′ が y 軸に平行になるように動くとき，線分 PP′ の長さを最大にする P を P_t で表し，$t\geqq 0$ が変化するときに P_t が描く曲線を C' とする。また，楕円 $ax^2+by^2=1$ と C' との交点を $\mathrm{Q}(\alpha,\ \beta)$ とする。

(1) 曲線 C' の方程式 $y=f(x)$ を求めよ。

(2) α と β を求めよ。

(3) 直線 $y=\beta$，曲線 C' および y 軸が囲む領域を D とする。D を y 軸の回りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

☆ ☆



(1) C は下に凸であるから，PP′ の長さが最大になるのは P′ における C の接線が ℓ_t と平行なときである。

そのとき，$\mathrm{P}'(X,\ Y)$ とおくと，$Y=-\sqrt{\dfrac{1-aX^2}{b}}$ であり，

接線 $aXx+bYy=1$ の傾きが t なので

$$t=-\frac{aX}{bY}=\frac{aX}{b\sqrt{\dfrac{1-aX^2}{b}}}=\frac{aX}{\sqrt{b\left(1-aX^2\right)}}$$

となる。

$\mathrm{P}_t(x,\ y)$ とおくと，

$$x=X,\ y=tX=\frac{aX^2}{\sqrt{b\left(1-aX^2\right)}}$$

であるから C' の方程式は

$$y=\frac{ax^2}{\sqrt{b\left(1-ax^2\right)}}\quad\cdots① \quad \left(0\leqq x<\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

(2) $ax^2+by^2=1$ と①を連立させて

$$ax^2+\frac{a^2x^4}{1-ax^2}=1 \quad \text{より} \quad ax^2=1-ax^2$$

よって　$ax^2=\dfrac{1}{2}$　となり　$by^2=1-ax^2=\dfrac{1}{2}$

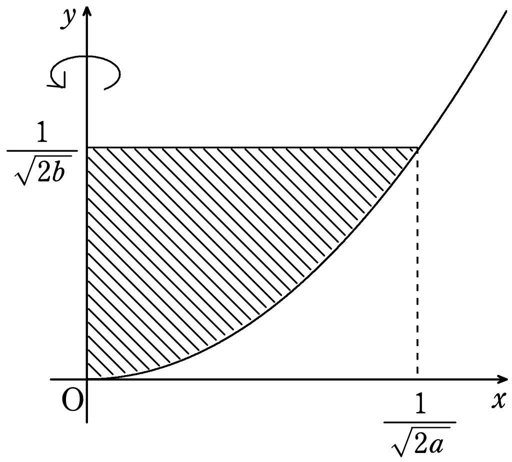
したがって　$x=\sqrt{\dfrac{1}{2a}}$, $y=\sqrt{\dfrac{1}{2b}}$　なので

$\alpha=\sqrt{\dfrac{1}{2a}}$, $\beta=\sqrt{\dfrac{1}{2b}}$

(3)　①より　$by^2(1-ax^2)=(ax^2)^2$　なので

$(ax^2)^2+by^2\cdot ax^2-by^2=0$　から

$$ax^2=\frac{-by^2+\sqrt{b^2y^4+4by^2}}{2}=\frac{-by^2+\sqrt{b}y\sqrt{by^2+4}}{2}$$



したがって　$V=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2b}}}\pi x^2\,dy$

$$=\frac{\pi}{2a}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2b}}}\left(-by^2+\sqrt{b}y\sqrt{by^2+4}\right)dy$$

$$=\frac{\pi}{2a}\left[-\frac{1}{3}by^3+\frac{1}{3\sqrt{b}}(by^2+4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2b}}}$$

$$=\frac{\pi}{2a}\left(\frac{13\sqrt{2}}{6\sqrt{b}}-\frac{8}{3\sqrt{b}}\right)$$

$$=\left(\frac{13\sqrt{2}-16}{12a\sqrt{b}}\right)\pi$$