[東京工業大学 2006 年前期 $\boxed{1}$]

以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対し $I(n)=\int_0^{\frac{n\pi}{2}}|\sin x|dx$ を求めよ。

(2) 次の不等式を示せ。

$$0 \leqq \int_0^{\frac{s\pi}{2}}\cos x\,dx - s \leqq \left(\frac{\pi}{2}-1\right)s \quad (0 \leqq s \leqq 1)$$

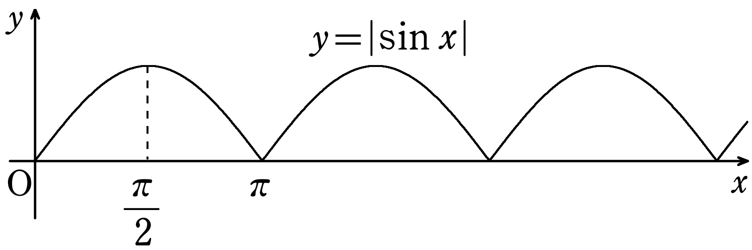
(3) a を正の数とし，a を超えない最大の整数を $[a]$ で表す。$[a]$ が奇数のとき次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin at|dt - 1 \leqq \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1-\frac{[a]}{a}\right)$$

(1) $y=|\sin x|$ は周期 π であり，

$x=\dfrac{\pi}{2}$ に関して対称なので

$I(n)=n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx = n$



(2) 証明すべき不等式は $s \leqq \int_0^{\frac{s\pi}{2}}\cos x\,dx \leqq \dfrac{s\pi}{2}$ と同じである。

$\dfrac{s\pi}{2}=t$ とおくと，$\dfrac{2}{\pi}t \leqq \int_0^{t}\cos x\,dx \leqq t$

すなわち $\dfrac{2}{\pi}t \leqq \sin t \leqq t \quad \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ となるので，これを示す。

左側の不等式について $f(t)=\sin t-\dfrac{2}{\pi}t$ とおくと

$f'(t)=\cos t-\dfrac{2}{\pi}$ であり $\cos\alpha=\dfrac{2}{\pi}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす α をとると

$f(t)$ の増減は右表の通り。

よって不等式は成り立つ。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	↗		↘	0

また，右側の不等式について $g(t)=t-\sin t$ とおくと

$g'(t)=1-\cos t$ であり $g(t)$ の増減は右表の通り。

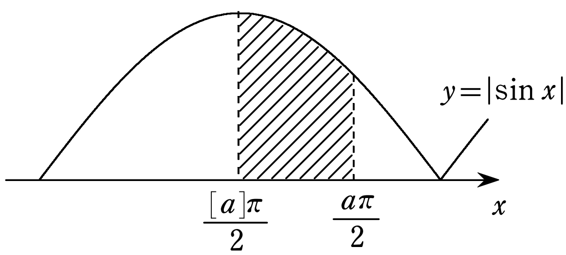
よって不等式は成り立つ。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$	0	$+$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	0

(3) $at=x$ として置換積分をすると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin at|dt=\int_0^{\frac{a\pi}{2}}|\sin x|\frac{1}{a}dx=\frac{1}{a}\left(\int_0^{\frac{[a]\pi}{2}}|\sin x|dx+\int_{\frac{[a]\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}|\sin x|dx\right)$$ となる。

1 つ目の積分は(1)より $\int_0^{\frac{[a]\pi}{2}}|\sin x|dx=[a]$ となる。



2 つ目の積分は，$[a]$が奇数なので

$y=|\sin x|$ の $\frac{[a]\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{a\pi}{2}$ の部分を x 軸の方向に

平行移動すると $y=|\cos x|$ の $0\leqq x\leqq\frac{(a-[a])\pi}{2}$ の部分に移ること，および $a-[a]<1$であることから $\int_0^{\frac{(a-[a])\pi}{2}}\cos x\,dx$ に等しい。

したがって $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin at|dt-1=\frac{1}{a}\left([a]+\int_0^{\frac{(a-[a])\pi}{2}}\cos x\,dx\right)-1$$

$$=\frac{1}{a}\left([a]-a+\int_0^{\frac{(a-[a])\pi}{2}}\cos x\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{a}\left(\int_0^{\frac{(a-[a])\pi}{2}}\cos x\,dx-(a-[a])\right)$$

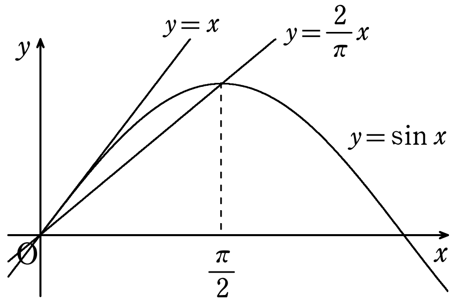
(2)において $s=a-[a]$ として $$\leqq\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)(a-[a])$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1-\frac{[a]}{a}\right)$$

[注]

(2)で示した不等式は $y=\sin x$, $y=x$, $y=\frac{2}{\pi}x$ の

上下関係からも成り立つことがわかる。



[東京工業大学 2006 年前期 $\boxed{2}$]

以下の問いに答えよ。

(1) a, b を正の定数とし，$g(t)=\dfrac{1}{b}t^{a}-\log t$ とおく。$t>0$ における関数 $g(t)$ の増減を調べ極値を求めよ。

(2) m を正の定数とし，xy 座標平面において条件

(a) $y>x>0$ (b) すべての $t>0$ に対し $\dfrac{1}{y}t^{x}-\log t \geqq m$

を満たす点 (x, y) からなる領域を D とする。D の概形を図示せよ。

(3) (2)の領域 D の面積を求めよ。

(1) $g'(t)=\dfrac{a}{b}t^{a-1}-\dfrac{1}{t}=\dfrac{\frac{a}{b}t^{a}-1}{t}$ である。

$\dfrac{a}{b}t^{a}-1=0$ となるのは $t=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a}}$ のときで，$g(t)$ の増減は下表の通り。

t	0	$\cdots$	$\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a}}$	$\cdots$	
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$		↘		↗	

よって $g(t)$ は $0<t<\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a}}$ で減少し，$\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a}}<t$ で増加する。

したがって極小値をもち，その値は $g\left(\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a}}\right)=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a}\log\dfrac{b}{a}$

(2) 条件(a) より $y>x>0$ …①

このとき，(1)より $t>0$ における $\dfrac{1}{y}t^{x}-\log t$ の最小値は $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\log\dfrac{y}{x}$ であるから

条件(b) より $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\log\dfrac{y}{x}\geqq m$ である。

よって $\log\dfrac{y}{x} \leqq 1-mx$ より $y \leqq xe^{1-mx}$ …②

$f(x)=xe^{1-mx}$ とおく。

$f'(x)=e^{1-mx}-mxe^{1-mx}=(1-mx)e^{1-mx}$ より

$f(x)$ の増減は右表のようになる。

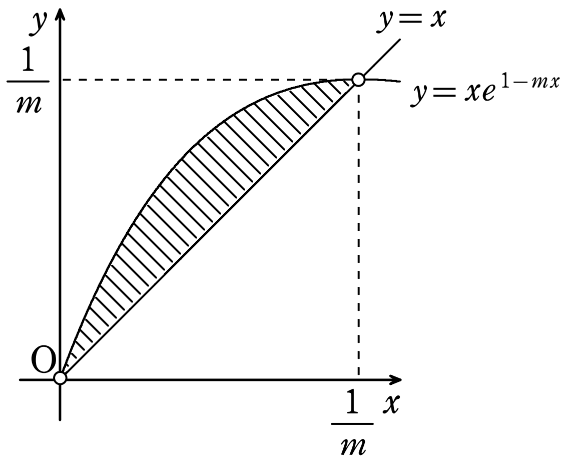
t	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{m}$	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$
$g(t)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{m}$	$\searrow$

さらに $f(x)-x=(1-mx)e^{1-mx}>0$ より

領域 D，すなわち①かつ②を図示すると

右図の打点部分となる。

ただし，$y=x$ 上の点は含まない。



(3) 求める面積は，部分積分を用いると

$$\int_0^{\frac{1}{m}} xe^{1-mx}dx-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}\right)^2=\left[x\cdot\left(-\frac{1}{m}e^{1-mx}\right)\right]_0^{\frac{1}{m}}-\int_0^{\frac{1}{m}}\left(-\frac{1}{m}e^{1-mx}\right)dx-\frac{1}{2m^2}$$

$$=-\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m}\left[-\frac{1}{m}e^{1-mx}\right]_0^{\frac{1}{m}}-\frac{1}{2m^2}$$

$$=-\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m}\left(-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}e\right)-\frac{1}{2m^2}$$

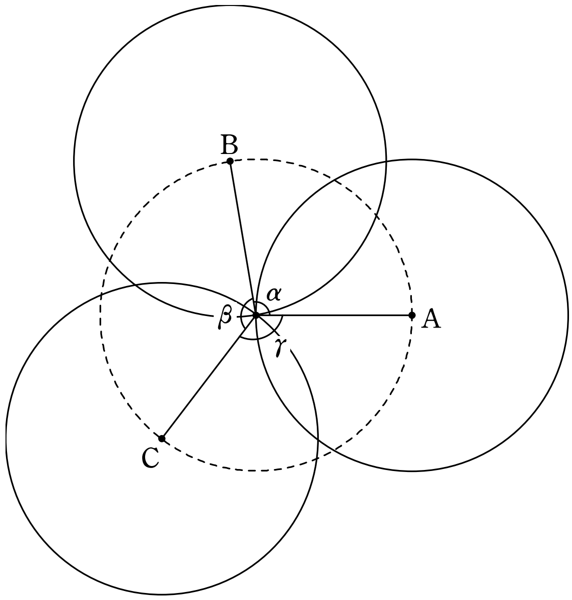
$$=\frac{2e-5}{2m^2}$$

[東京工業大学 2006 年前期 $\boxed{3}$]

平面上を半径 1 の 3 個の円板が下記の条件(a)と(b)を満たしながら動くとき，これら 3 個の円板の和集合の面積 S の最大値を求めよ。

(a) 3 個の円板の中心はいずれも定点 P を中心とする半径 1 の円周上にある。

(b) 3 個の円板すべてが共有する点は P のみである。



3 個の円板の中心を A, B, C とする。

条件(a), (b) より，3 個の円板の半径はいずれも 1 であり，

$\alpha=\angle\mathrm{APB},\ \beta=\angle\mathrm{BPC},\ \gamma=\angle\mathrm{CPA}$ とおくと

$0\leqq\alpha\leqq\pi$ …①，$0\leqq\beta\leqq\pi$ …②，

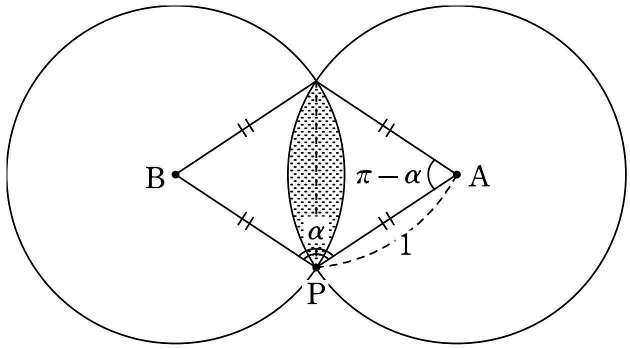
$0\leqq\gamma\leqq\pi$ …③，$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ …④ である。

円板 A と B，B と C，C と A の共通部分の面積を

$T(\alpha),\ T(\beta),\ T(\gamma)$ とおくと

$$T(\alpha)=2\left\{\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot(\pi-\alpha)-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin(\pi-\alpha)\right\}$$

$$=\pi-\alpha-\sin\alpha$$



であるから，3 個の円板の和集合の面積 S は

$$S=3\times\pi\cdot1^2-\{T(\alpha)+T(\beta)+T(\gamma)\}$$

$$=\alpha+\beta+\gamma+\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$$

$$=2\pi+\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$$

ここで，α を①の範囲で固定して，β,γ を②，③，④の範囲で変化させると

$$\sin\beta+\sin\gamma=2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

これは $\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}=1$ のとき，すなわち $\beta=\gamma=\pi-\dfrac{\alpha}{2}$ のときに最大値 $2\sin\dfrac{\alpha}{2}$ をとる。

よって S の最大値は $2\pi+\sin\alpha+2\sin\dfrac{\alpha}{2}$ となる。

次に，$f(\alpha)=2\pi+\sin\alpha+2\sin\dfrac{\alpha}{2}$ として α を変化させる。

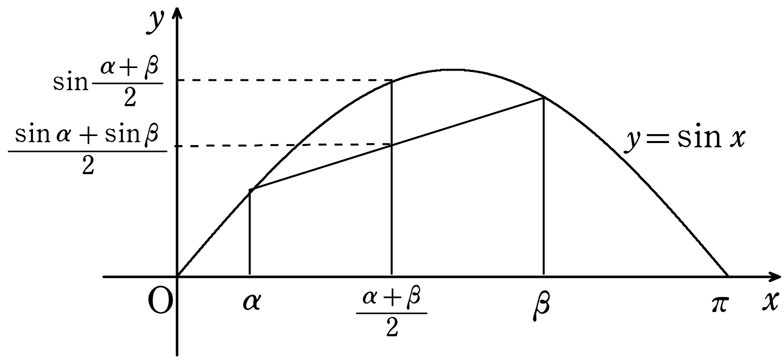
$$f'(\alpha)=\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1+\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$=\left(2\cos\frac{\alpha}{2}-1\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)$$

より $f(\alpha)$ の増減は右表の通り。

したがって，求める最大値は $f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=2\pi+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

[注]

$S=2\pi+\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ から $y=\sin x$ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ で上に凸であることを利用すると，次のように最大値を求めることもできる。



図より $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}\leqq\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ （等号成立は $\alpha=\beta$ のとき）

この不等式を $0\leqq\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\leqq\pi$ に対して適用すると

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta}{4}=\frac{\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}+\dfrac{\sin\gamma+\sin\delta}{2}}{2}$$
$$\leqq\frac{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\sin\dfrac{\gamma+\delta}{2}}{2}$$
$$\leqq\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}$$ （等号成立は $\alpha=\beta=\gamma=\delta$ のとき）

ここで，$\delta=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ とすると $0\leqq\delta\leqq\pi$ であり

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}{4} \leqq \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}{4}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \leqq 4\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \leqq 3\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$ を得る。

（等号成立は $\alpha=\beta=\gamma=\delta$ すなわち $\alpha=\beta=\gamma$ のとき）

$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ とおけば $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \leqq 3\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ となる。

（等号成立は $\alpha=\beta=\gamma=\frac{2}{3}\pi$ のとき）

よって S の最大値は $2\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}$

[東京工業大学 2006 年 前期 $\boxed{4}$]

☆ ☆

空間内の四面体 ABCD を考える。辺 AB, BC, CD, DA の中点を, それぞれ K, L, M, N とする。

(1) $4\overrightarrow{\mathrm{MK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LN}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2$ を示せ。ここに $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の長さを表す。

(2) 四面体 ABCD のすべての面が互いに合同であるとする。このとき

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|,\ |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|,\ |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$ を示せ。

(3) 辺 AC の中点を P とし, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{3},\ |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{5},\ |\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{6}$ とする。(2)の仮定のもとで,

四面体 PKLN の体積を求めよ。

☆ ☆

(1) A, B, C, D の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ とすると

$$4\overrightarrow{\mathrm{MK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LN}}=4\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\vec{d}+\vec{a}}{2}-\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)$$

$$=\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}-\vec{d}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}\right)$$

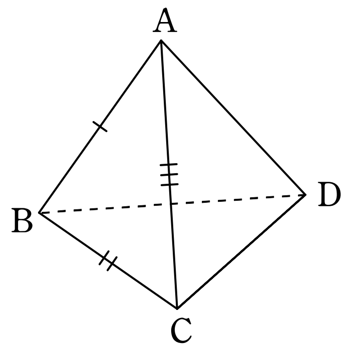
$$=\left\{\left(\vec{a}-\vec{c}\right)+\left(\vec{b}-\vec{d}\right)\right\}\cdot\left\{\left(\vec{a}-\vec{c}\right)-\left(\vec{b}-\vec{d}\right)\right\}$$

$$=\left|\vec{a}-\vec{c}\right|^2-\left|\vec{b}-\vec{d}\right|^2$$

$$=\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{DB}}\right|^2$$

$$=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|^2$$ ＝（右辺） よって成り立つ。

(2) (i) △ABC の 3 辺が相異なるとき

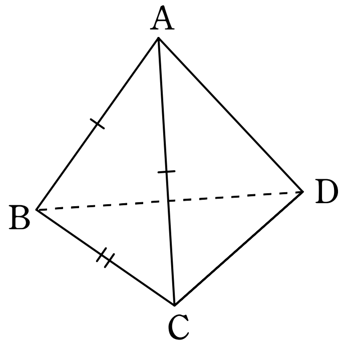


△ACD に着目すると, AD または CD が AB に等しくなるが,

AD＝AB とすると△ABD の 2 辺が等しくなってしまうから

CD＝AB となる。したがって AD＝BC となり BD＝AC となる。

(ⅱ) △ABC の 2 辺のみが等しいとき



仮に $AB = AC \neq BC$ とすると，△BCD に着目して，

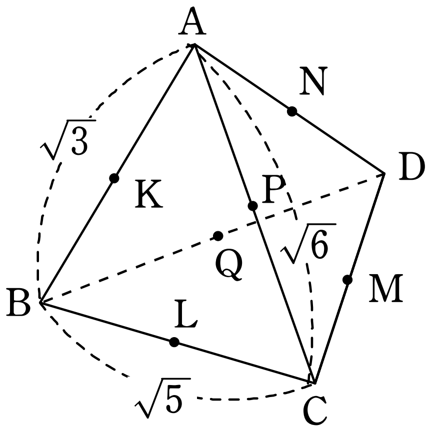
$DB = DC = AB = AC$ したがって $AD = BC$ である。

(ⅲ) △ABC の正三角形のとき

正四面体であるから $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|, \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right|, \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$ が成り立つ。

以上，(ⅰ)(ⅱ)(ⅲ) いずれの場合でも題意は成り立つ。

(3) (1)，(2)より $\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{LN} = 0$



BD の中点を Q とすると，

同様にして $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$，$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{LN} = 0$ であり，

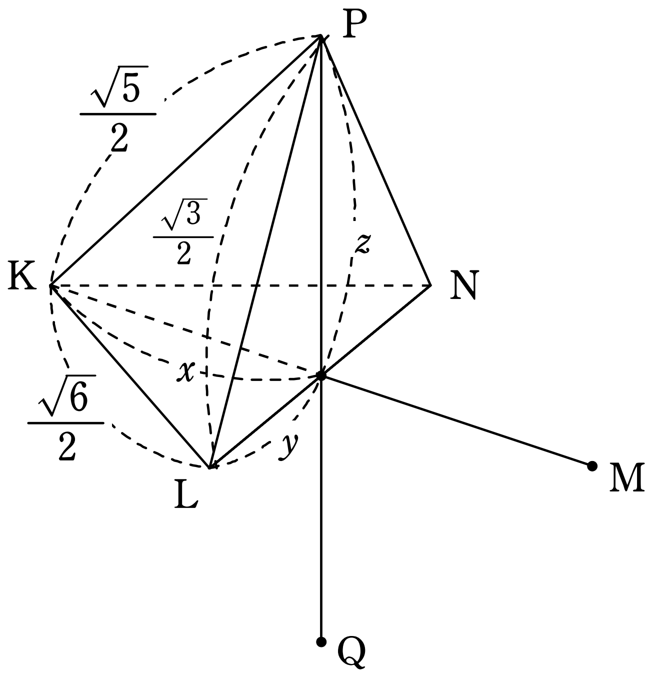
MK, LN, PQ の中点の位置ベクトルはいずれも

$\dfrac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}$ であるから

MK, LN, PQ は互いに中点で直交する。

さらに，K, L, P は各辺の中点であるから図のような位置関係になる。

図のように x, y, z を定めると，



$$x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

$$y^2 + z^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$z^2 + x^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

より $x^2 = 1,\ y^2 = \dfrac{1}{2},\ z^2 = \dfrac{1}{4}$ である。

$xyz = 1 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となるから

求める体積は$2y\cdot x\cdot\dfrac{1}{2}\cdot z\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}xyz=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

[注] すべての面が合同である四面体は，直方体に内接させることができます。