［ 東京工業大学 2006 年前期 $\boxed{1}$ ］

以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 $n$ に対し $I(n)=\int_0^{\frac{n\pi}{2}}|\sin x|dx$ を求めよ。

(2) 次の不等式を示せ。

$$0 \leqq \int_0^{\frac{s\pi}{2}}\cos x\,dx - s \leqq \left(\frac{\pi}{2}-1\right)s \quad (0 \leqq s \leqq 1)$$

(3) $a$ を正の数とし，$a$ を超えない最大の整数を $[a]$ で表す。$[a]$ が奇数のとき次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin at|dt - 1 \leqq \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1-\frac{[a]}{a}\right)$$

[ 東京工業大学 2006 年前期 $\boxed{2}$ ]

以下の問いに答えよ。

(1) $a,\ b$ を正の定数とし，$g(t)=\dfrac{1}{b}t^a-\log t$ とおく。$t>0$ における関数 $g(t)$ の増減を調べ極値を求めよ。

(2) $m$ を正の定数とし，$xy$ 座標平面において条件

(a) $y>x>0$　　(b) すべての $t>0$ に対し $\dfrac{1}{y}t^x-\log t \geqq m$

を満たす点 $(x,\ y)$ からなる領域を $D$ とする。$D$ の概形を図示せよ。

(3) (2)の領域 $D$ の面積を求めよ。

[ 東京工業大学 2006 年前期 $\boxed{3}$ ]

平面上を半径 1 の 3 個の円板が下記の条件(a) と (b) を満たしながら動くとき，これら 3 個の円板の和集合の面積 $S$ の最大値を求めよ。

(a) 3 個の円板の中心はいずれも定点 $P$ を中心とする半径 1 の円周上にある。

(b) 3 個の円板すべてが共有する点は $P$ のみである。

[ 東京工業大学 2006 年 前期 $\boxed{4}$ ]

☆ ☆

空間内の四面体 ABCD を考える。辺 AB, BC, CD, DA の中点を, それぞれ K, L, M, N とする。

(1) $4\overrightarrow{\mathrm{MK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LN}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2$ を示せ。ここに $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の長さを表す。

(2) 四面体 ABCD のすべての面が互いに合同であるとする。このとき

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|,\ |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|,\ |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$ を示せ。

(3) 辺 AC の中点を P とし, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{3},\ |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{5},\ |\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{6}$ とする。(2)の仮定のもとで,

四面体 PKLN の体積を求めよ。

☆ ☆