[東京工業大学 2006 年 前期 $\boxed{4}$]

空間内の四面体 ABCD を考える。辺 AB, BC, CD, DA の中点を，それぞれ K, L, M, N とする。

(1) $4\overrightarrow{\mathrm{MK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LN}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2$ を示せ。ここに $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の長さを表す。

(2) 四面体 ABCD のすべての面が互いに合同であるとする。このとき

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|,\ |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|,\ |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$ を示せ。

(3) 辺 AC の中点を P とし，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{3},\ |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{5},\ |\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{6}$ とする。(2)の仮定のもとで，四面体 PKLN の体積を求めよ。

(1) A, B, C, D の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ とすると

$$4\overrightarrow{\mathrm{MK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LN}}=4\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\vec{d}+\vec{a}}{2}-\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)$$

$$=\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}-\vec{d}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}\right)$$

$$=\left\{\left(\vec{a}-\vec{c}\right)+\left(\vec{b}-\vec{d}\right)\right\}\cdot\left\{\left(\vec{a}-\vec{c}\right)-\left(\vec{b}-\vec{d}\right)\right\}$$

$$=\left|\vec{a}-\vec{c}\right|^2-\left|\vec{b}-\vec{d}\right|^2$$

$$=\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{DB}}\right|^2$$

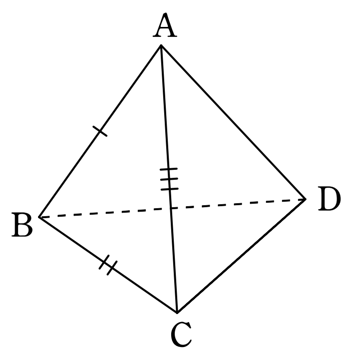
$$=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|^2$$ ＝（右辺）　よって成り立つ。

(2) (ⅰ) △ABC の 3 辺が相異なるとき

△ACD に着目すると，AD または CD が AB に等しくなるが，

AD＝AB とすると△ABD の 2 辺が等しくなってしまうから

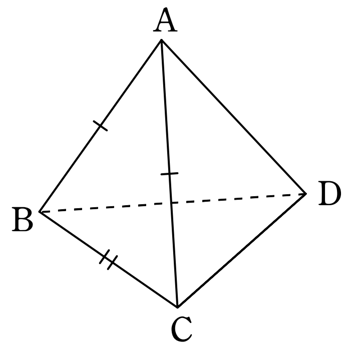
CD＝AB となる。したがって AD＝BC となり BD＝AC となる。



(ii) $\triangle$ABC の 2 辺のみが等しいとき

仮に $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}\neq\mathrm{BC}$ とすると，$\triangle$BCD に着目して，

$\mathrm{DB}=\mathrm{DC}=\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$　したがって $\mathrm{AD}=\mathrm{BC}$ である。



(iii) $\triangle$ABC の正三角形のとき

正四面体であるから $\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|$ が成り立つ。

以上，(i)(ii)(iii) いずれの場合でも題意は成り立つ。

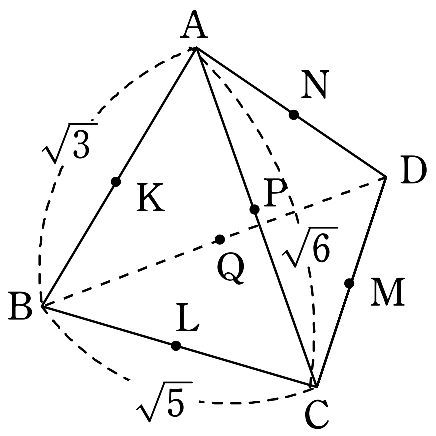
(3) (1), (2)より $\overrightarrow{\mathrm{MK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LN}}=0$

BD の中点を Q とすると，

同様にして $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MK}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LN}}=0$ であり，

MK, LN, PQ の中点の位置ベクトルはいずれも

$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$ であるから



MK, LN, PQ は互いに中点で直交する。

さらに，K, L, P は各辺の中点であるから図のような位置関係になる。

図のように $x,\ y,\ z$ を定めると，

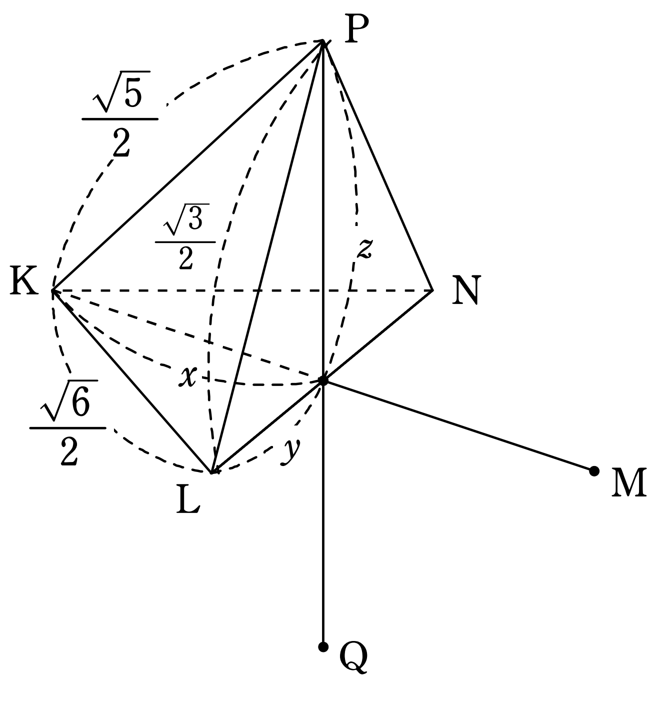
$$x^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$$

$$y^2+z^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

$$z^2+x^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

より $x^2=1,\ y^2=\dfrac{1}{2},\ z^2=\dfrac{1}{4}$ である。

$xyz=1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となるから



求める体積は$2y\cdot x\cdot\dfrac{1}{2}\cdot z\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}xyz=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

[注] すべての面が合同である四面体は，直方体に内接させることができます。