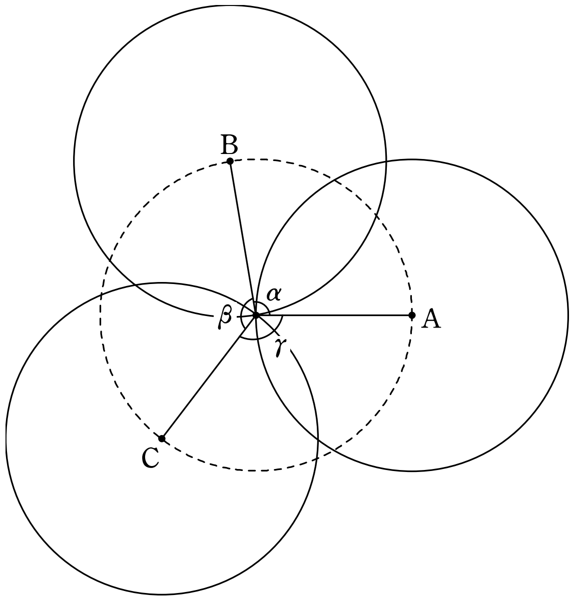
[東京工業大学 2006 年前期 $\boxed{3}$]

平面上を半径 1 の 3 個の円板が下記の条件(a)と(b)を満たしながら動くとき，これら 3 個の円板の和集合の面積 S の最大値を求めよ。

(a) 3 個の円板の中心はいずれも定点 P を中心とする半径 1 の円周上にある。

(b) 3 個の円板すべてが共有する点は P のみである。



3 個の円板の中心を A, B, C とする。

条件 (a), (b) より，3 個の円板の半径はいずれも 1 であり，

$\alpha = \angle\mathrm{APB},\ \beta = \angle\mathrm{BPC},\ \gamma = \angle\mathrm{CPA}$ とおくと

$0 \leqq \alpha \leqq \pi$ …①，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ …②，

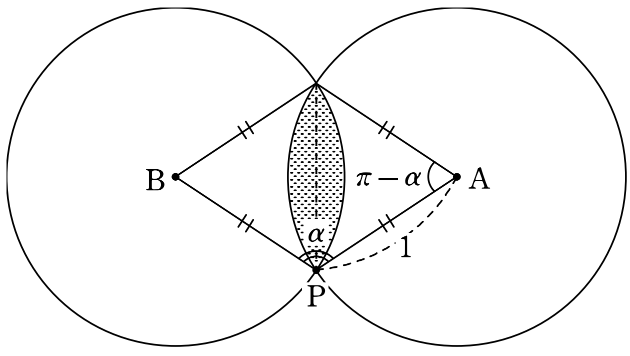
$0 \leqq \gamma \leqq \pi$ …③，$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ …④ である。

円板 A と B，B と C，C と A の共通部分の面積を

$T(\alpha), T(\beta), T(\gamma)$ とおくと

$$T(\alpha) = 2\left\{\frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot (\pi - \alpha) - \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \sin(\pi - \alpha)\right\}$$

$$= \pi - \alpha - \sin\alpha$$



であるから，3 個の円板の和集合の面積 S は

$$S = 3 \times \pi \cdot 1^2 - \{T(\alpha) + T(\beta) + T(\gamma)\}$$

$$= \alpha + \beta + \gamma + \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$$

$$= 2\pi + \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$$

ここで，α を①の範囲で固定して，β, γ を②，③，④の範囲で変化させると

$$\sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

これは $\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2} = 1$ のとき，すなわち $\beta = \gamma = \pi - \dfrac{\alpha}{2}$ のときに最大値 $2\sin\dfrac{\alpha}{2}$ をとる。

よって S の最大値は $2\pi + \sin\alpha + 2\sin\dfrac{\alpha}{2}$ となる。

次に，$f(\alpha)=2\pi+\sin\alpha+2\sin\dfrac{\alpha}{2}$ としてαを変化させる。

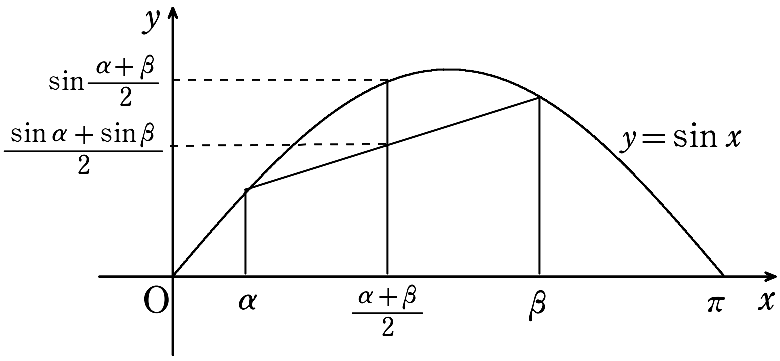
$$
\begin{aligned}
f'(\alpha)&=\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}\\
&=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1+\cos\frac{\alpha}{2}\\
&=\left(2\cos\frac{\alpha}{2}-1\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)
\end{aligned}
$$

より $f(\alpha)$ の増減は右表の通り。

したがって，求める最大値は $f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=2\pi+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

[注]

$S=2\pi+\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ から $y=\sin x$ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ で上に凸であることを利用すると，次のように最大値を求めることもできる。



図より $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}\leqq\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ （等号成立は $\alpha=\beta$ のとき）

この不等式を $0\leqq\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\leqq\pi$ に対して適用すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta}{4}&=\frac{\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}+\dfrac{\sin\gamma+\sin\delta}{2}}{2}\\
&\leqq\frac{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\sin\dfrac{\gamma+\delta}{2}}{2}\\
&\leqq\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}
\end{aligned}
$$

（等号成立は $\alpha=\beta=\gamma=\delta$ のとき）

ここで，$\delta=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ とすると $0\leqq\delta\leqq\pi$ であり

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}{4} \leqq \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma+\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}{4}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \leqq 4\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \leqq 3\sin\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ を得る。

（等号成立は $\alpha=\beta=\gamma=\delta$ すなわち $\alpha=\beta=\gamma$ のとき）

$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ とおけば $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \leqq 3\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ となる。

（等号成立は $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき）

よって S の最大値は $2\pi+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$