[東京工業大学 2006 年前期 $\boxed{2}$]

以下の問いに答えよ。

(1) a, b を正の定数とし，$g(t)=\dfrac{1}{b}t^a-\log t$ とおく。$t>0$ における関数 $g(t)$ の増減を調べ極値を求めよ。

(2) m を正の定数とし，xy 座標平面において条件

(a) $y>x>0$　　(b) すべての $t>0$ に対し $\dfrac{1}{y}t^x-\log t \geqq m$

を満たす点 (x, y) からなる領域を D とする。D の概形を図示せよ。

(3) (2)の領域 D の面積を求めよ。

---

(1) $g'(t)=\dfrac{a}{b}t^{a-1}-\dfrac{1}{t}=\dfrac{\dfrac{a}{b}t^a-1}{t}$ である。

$\dfrac{a}{b}t^a-1=0$ となるのは $t=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a}}$ のときで，$g(t)$ の増減は下表の通り。

t	0	$\cdots$	$\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a}}$	$\cdots$	
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$		↘		↗	

よって $g(t)$ は $0<t<\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a}}$ で減少し，$\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a}}<t$ で増加する。

したがって極小値をもち，その値は $g\left(\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a}}\right)=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a}\log\dfrac{b}{a}$

(2) 条件(a) より $y>x>0$ …①

このとき，(1)より $t>0$ における $\dfrac{1}{y}t^x-\log t$ の最小値は $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\log\dfrac{y}{x}$ であるから

条件(b) より $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\log\dfrac{y}{x}\geqq m$ である。

よって $\log\dfrac{y}{x} \leqq 1-mx$ より $y \leqq xe^{1-mx}$ …②

$f(x) = xe^{1-mx}$ とおく。

$f'(x) = e^{1-mx} - mxe^{1-mx} = (1-mx)e^{1-mx}$ より

$f(x)$ の増減は右表のようになる。

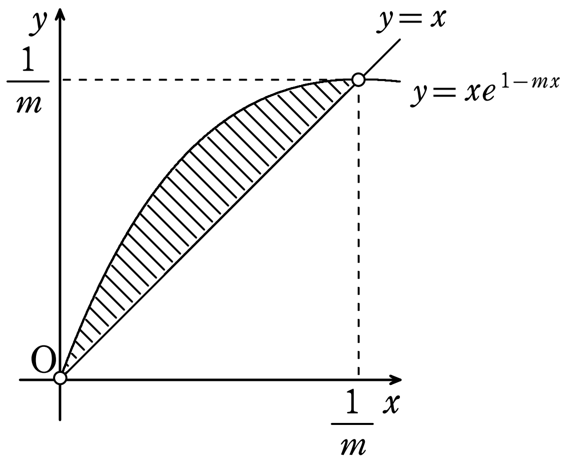
t	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{m}$	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$
$g(t)$		↗	$\dfrac{1}{m}$	↘

さらに $f(x) - x = (1-mx)e^{1-mx} > 0$ より

領域 D，すなわち①かつ②を図示すると

右図の打点部分となる。

ただし，$y = x$ 上の点は含まない。



(3) 求める面積は，部分積分を用いると

$$\int_0^{\frac{1}{m}} xe^{1-mx}dx - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}\right)^2 = \left[x\cdot\left(-\frac{1}{m}e^{1-mx}\right)\right]_0^{\frac{1}{m}} - \int_0^{\frac{1}{m}}\left(-\frac{1}{m}e^{1-mx}\right)dx - \frac{1}{2m^2}$$

$$= -\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m}\left[-\frac{1}{m}e^{1-mx}\right]_0^{\frac{1}{m}} - \frac{1}{2m^2}$$

$$= -\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m}\left(-\frac{1}{m} + \frac{1}{m}e\right) - \frac{1}{2m^2}$$

$$= \frac{2e-5}{2m^2}$$