[東京工業大学 2006 年前期 $\boxed{1}$]

以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対し $I(n)=\int_0^{\frac{n\pi}{2}}|\sin x|dx$ を求めよ。

(2) 次の不等式を示せ。

$$0\leqq\int_0^{\frac{s\pi}{2}}\cos x\,dx-s\leqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)s\quad(0\leqq s\leqq 1)$$

(3) a を正の数とし，a を超えない最大の整数を $[a]$ で表す。$[a]$ が奇数のとき次の不等式が成り立つことを示せ。

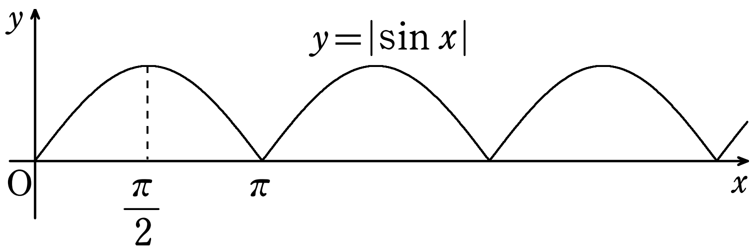
$$0\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin at|dt-1\leqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1-\frac{[a]}{a}\right)$$

---

(1) $y=|\sin x|$ は周期 π であり，

$x=\dfrac{\pi}{2}$ に関して対称なので

$I(n)=n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=n$



(2) 証明すべき不等式は $s\leqq\int_0^{\frac{s\pi}{2}}\cos x\,dx\leqq\dfrac{s\pi}{2}$ と同じである。

$\dfrac{s\pi}{2}=t$ とおくと，$\dfrac{2}{\pi}t\leqq\int_0^t\cos x\,dx\leqq t$

すなわち $\dfrac{2}{\pi}t\leqq\sin t\leqq t\ \left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ となるので，これを示す。

左側の不等式について $f(t)=\sin t-\dfrac{2}{\pi}t$ とおくと

$f'(t)=\cos t-\dfrac{2}{\pi}$ であり $\cos\alpha=\dfrac{2}{\pi}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす α をとると

$f(t)$ の増減は右表の通り。

よって不等式は成り立つ。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

また，右側の不等式について $g(t)=t-\sin t$ とおくと

$g'(t)=1-\cos t$ であり $g(t)$ の増減は右表の通り。

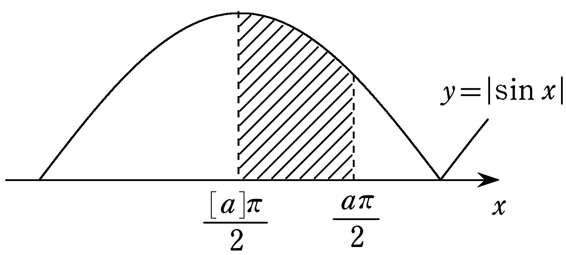
よって不等式は成り立つ。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$g'(t)$	0	$+$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	0

(3) $at=x$ として置換積分をすると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin at|dt=\int_0^{\frac{a\pi}{2}}|\sin x|\frac{1}{a}dx=\frac{1}{a}\left(\int_0^{\frac{[a]\pi}{2}}|\sin x|dx+\int_{\frac{[a]\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}|\sin x|dx\right)$$ となる。

1 つ目の積分は(1)より $\displaystyle\int_0^{\frac{[a]\pi}{2}}|\sin x|dx=[a]$ となる。



2 つ目の積分は，$[a]$が奇数なので

$y=|\sin x|$ の $\dfrac{[a]\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{a\pi}{2}$ の部分を x 軸の方向に

平行移動すると $y=|\cos x|$ の $0\leqq x\leqq\dfrac{(a-[a])\pi}{2}$ の部分に移ること，および $a-[a]<1$である

ことから $\displaystyle\int_0^{\frac{(a-[a])\pi}{2}}\cos x\,dx$ に等しい。

したがって $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin at|dt-1=\frac{1}{a}\left([a]+\int_0^{\frac{(a-[a])\pi}{2}}\cos x\,dx\right)-1$$

$$=\frac{1}{a}\left([a]-a+\int_0^{\frac{(a-[a])\pi}{2}}\cos x\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{a}\left(\int_0^{\frac{(a-[a])\pi}{2}}\cos x\,dx-(a-[a])\right)$$

(2)において$s=a-[a]$として $\displaystyle\leqq\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)(a-[a])$

$$=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1-\frac{[a]}{a}\right)$$

[注]

(2)で示した不等式は $y=\sin x$, $y=x$, $y=\dfrac{2}{\pi}x$ の

上下関係からも成り立つことがわかる。