[**東京工業大学 2005 年後期 $\boxed{1}$**]

数列$\{a_m\}$（ただし$a_m = m$とする）に対し $b_n = \sum_{m=1}^{n} a_m$ とおく。

(1) $0 < r < 1$ とするとき，$\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ および $\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = 0$ となることを証明せよ。

(2) $S_m = a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_m r^m$，$T_n = b_1 r + b_2 r^2 + \cdots + b_n r^n$ とおくとき，$\lim_{m\to\infty} S_m$ および $\lim_{m\to\infty} T_m$ を求めよ。

(1) $r = \dfrac{1}{1+h}$ $(h > 0)$ とおく。

二項定理より $(1+h)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 h + {}_n\mathrm{C}_2 h^2 + {}_n\mathrm{C}_3 h^3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n h^n$ …①

①の各項は正なので $(1+h)^n > {}_n\mathrm{C}_2 h^2 \iff (1+h)^n > \dfrac{n(n-1)}{2} h^2$

$$\iff 0 < \left(\frac{1}{1+h}\right)^n < \frac{2}{n(n-1)h^2}$$

$$\iff 0 < n\left(\frac{1}{1+h}\right)^n < \frac{2}{(n-1)h^2}$$

$$\iff 0 < nr^n < \frac{2}{(n-1)h^2}$$

ここで，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{2}{(n-1)h^2} = 0$ であるから，はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$

また，①より $(1+h)^n > {}_n\mathrm{C}_3 h^3 \iff (1+h)^n > \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} h^3$

$$\iff 0 < \left(\frac{1}{1+h}\right)^n < \frac{6}{n(n-1)(n-2)h^3}$$

$$\iff 0 < n^2\left(\frac{1}{1+h}\right)^n < \frac{6}{\left(1-\frac{1}{n}\right)(n-2)h^3}$$

$$\iff 0 < n^2 r^n < \frac{6}{\left(1-\frac{1}{n}\right)(n-2)h^3}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\left(1-\frac{1}{n}\right)(n-2)h^3}=0$ であるから，はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2r^n=0$

(2)（ⅰ） $r=1$ のとき

$$S_m=a_1+a_2+\cdots+a_m=\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{m}k=\frac{m(m+1)}{2}\overset{m\to\infty}{\to}\infty$$

$$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{n=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\overset{n\to\infty}{\to}\infty$$

より，このとき極限値は存在しない。

（ⅱ） $r\neq1$ のとき

$$S_m=r+2r^2+\cdots+mr^m$$

$$rS_m=r^2+2r^3+\cdots+mr^{m+1}$$

より $(1-r)S_m=r+r^2+\cdots+r^m-mr^{m+1}=\dfrac{r(1-r^m)}{1-r}-mr^{m+1}$

$$S_m=\frac{r(1-r^m)}{(1-r)^2}-\frac{mr^{m+1}}{1-r}$$

また，$b_1=a_1$，$b_n-b_{n-1}=a_n\ (n\geqq2)$ であるから

$$T_n=b_1r+b_2r^2+\cdots+b_nr^n$$

$$rT_n=b_1r^2+b_2r^3+\cdots+b_nr^{n+1}$$

より $(1-r)T_n=b_1r+(b_2-b_1)r^2+(b_3-b_2)r^3+\cdots+(b_n-b_{n-1})r^n-b_nr^{n+1}$

$$=a_1r+a_2r^2+\cdots+a_nr^n-\frac{n(n+1)}{2}r^{n+1}=S_n-\frac{n(n+1)}{2}r^{n+1}$$

$$T_n=\frac{S_n}{1-r}-\frac{n(n+1)r^{n+1}}{2(1-r)}$$

$|r|<1$ のとき，(1)の結果より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|mr^{m+1}|=\lim_{n\to\infty}|n(n+1)r^{n+1}|=0$ なので

$\displaystyle\lim_{m\to\infty}S_m=\frac{r}{(1-r)^2}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n=\frac{\frac{r}{(1-r)^2}}{1-r}=\frac{r}{(1-r)^3}$ となる。

したがって，$|r|\geqq1$ のとき $\displaystyle\lim_{m\to\infty}S_m$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n$ は存在しない。

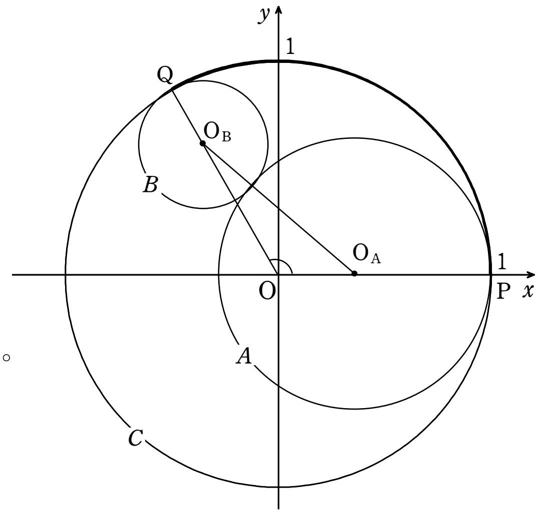
$|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{m\to\infty}S_m=\frac{r}{(1-r)^2}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n=\frac{r}{(1-r)^3}$ となる。

[**東京工業大学 2005 年後期 $\boxed{2}$**]

Cを半径 1 の円とし, その周上に長さθの円弧PQをおく。CとPで接しCの内部にある円をA, CとQで接し，Aにも接する円をBとする。

(1) AとBの面積の和の最小値をS_θで表せ。

(2) θが 0 から2πまで動くとき，S_θの最大値を求めよ。



(1) 図のように座標を導入する。

円Cを原点Oを中心とし，半径1の円とする。

$P(1, 0)$，$Q(\cos\theta, \sin\theta)$とすれば,

x軸に関する対称性から $0<\theta\leqq\pi$ で考えればよい。

2 円A, Bの半径をそれぞれ r_A, r_B ，中心を O_A, O_B とする。

$0<\theta<\pi$のとき，$\triangle OO_AO_B$において余弦定理より

$$(r_A+r_B)^2=(1-r_A)^2+(1-r_B)^2-2(1-r_A)(1-r_B)\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow\ (1+\cos\theta)r_Ar_B=(1-\cos\theta)\{1-(r_A+r_B)\}$$

よって $r_Ar_B=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\{1-(r_A+r_B)\}$

$$=\frac{\dfrac{1-\cos 2\cdot\dfrac{\theta}{2}}{2}}{\dfrac{1+\cos 2\cdot\dfrac{\theta}{2}}{2}}\{1-(r_A+r_B)\}$$

$$=\frac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}\{1-(r_A+r_B)\}$$

$$=\tan^2\frac{\theta}{2}\{1-(r_A+r_B)\}\ \cdots①$$

$p=\tan^2\dfrac{\theta}{2}\ (p>0)$ とおくと，①より

$S_\theta=\pi {r_A}^2+\pi {r_B}^2$

$$=\pi\left\{(r_A+r_B)^2-2r_Ar_B\right\}$$

$$=\pi\left[(r_A+r_B)^2-2p\{1-(r_A+r_B)\}\right]$$

$$=\pi\left[\left\{(r_A+r_B)+p\right\}^2-p^2-2p\right]$$

よって，θを固定すると r_A+r_B の最小値がS_θの最小値となる。

ここで，$\angle \mathrm{OO}_A\mathrm{O}_B=\alpha$，$\angle \mathrm{OO}_B\mathrm{O}_A=\beta$ とおくと

正弦定理より $\dfrac{1-r_A}{\sin\beta}=\dfrac{1-r_B}{\sin\alpha}=\dfrac{r_A+r_B}{\sin\theta}$ が成り立つので

$$1-r_A=\frac{\sin\beta}{\sin\theta}\left(r_A+r_B\right)\ \cdots②,\quad 1-r_B=\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\left(r_A+r_B\right)\ \cdots③$$

②＋③より $2-(r_A+r_B)=\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\theta}\left(r_A+r_B\right)$ から $r_A+r_B=\dfrac{2\sin\theta}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\theta}$

$\alpha+\beta=\pi-\theta\ (\alpha>0,\ \beta>0)$ であるから

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta&=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\&=2\sin\frac{\pi-\theta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\&=2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\&\leqq 2\cos\frac{\theta}{2}\qquad（等号成立は\alpha=\beta のとき）\end{aligned}$$

となるので，r_A+r_Bが最小となるのは $\alpha=\beta=\dfrac{\pi-\theta}{2}$ のときで，

このとき $r_A=r_B$ であるから

$$2r_A=\frac{2\sin\theta}{2\cos\frac{\theta}{2}+\sin\theta}\ \Leftrightarrow\ 2r_A=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$ より

$$r_A=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$$ となる。

よって $S_\theta=2\pi {r_A}^2=2\pi\left(\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2$ である。

(2) $0<\theta \leqq \pi$ で考えれば十分であるから

$0<\sin\dfrac{\theta}{2}\leqq 1$ であり，

$$S_\theta = 2\pi\left(\frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{1+\sin\dfrac{\theta}{2}}\right)^2 = 2\pi\left(1-\frac{1}{1+\sin\dfrac{\theta}{2}}\right)^2 \leqq 2\pi\left(1-\frac{1}{1+1}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

（等号成立は $\theta=\pi$ のとき）

よって，S_θ の最大値は $\dfrac{\pi}{2}$