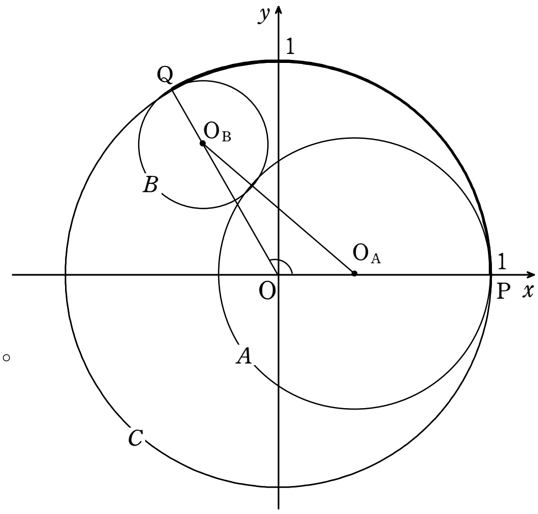
[東京工業大学 2005 年後期 $\boxed{2}$]

C を半径 1 の円とし, その周上に長さ θ の円弧 PQ をおく。C と P で接し C の内部にある円を A,

C と Q で接し, A にも接する円を B とする。

(1) A と B の面積の和の最小値を S_θ で表せ。

(2) θ が 0 から 2π まで動くとき, S_θ の最大値を求めよ。



(1) 図のように座標を導入する。

円 C を原点 O を中心とし，半径1の円とする。

$\mathrm{P}(1,\ 0)$， $\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とすれば,

x 軸に関する対称性から $0<\theta\leqq\pi$ で考えればよい。

2 円 $A,\ B$ の半径をそれぞれ $r_A,\ r_B$ ，中心を $\mathrm{O}_A,\ \mathrm{O}_B$ とする。

$0<\theta<\pi$ のとき，$\triangle \mathrm{OO}_A\mathrm{O}_B$ において余弦定理より

$$(r_A+r_B)^2=(1-r_A)^2+(1-r_B)^2-2(1-r_A)(1-r_B)\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow\ (1+\cos\theta)r_Ar_B=(1-\cos\theta)\{1-(r_A+r_B)\}$$

よって $r_Ar_B=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\{1-(r_A+r_B)\}$

$$=\frac{\dfrac{1-\cos 2\cdot\frac{\theta}{2}}{2}}{\dfrac{1+\cos 2\cdot\frac{\theta}{2}}{2}}\{1-(r_A+r_B)\}$$

$$=\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\{1-(r_A+r_B)\}$$

$$=\tan^2\frac{\theta}{2}\{1-(r_A+r_B)\}\ \cdots①$$

$p=\tan^2\dfrac{\theta}{2}\ (p>0)$ とおくと，①より

$S_\theta=\pi {r_A}^2+\pi {r_B}^2$

$$=\pi\left\{(r_A+r_B)^2-2r_Ar_B\right\}$$

$$=\pi\left[(r_A+r_B)^2-2p\{1-(r_A+r_B)\}\right]$$

$$=\pi\left[\left\{(r_A+r_B)+p\right\}^2-p^2-2p\right]$$

よって，θを固定すると r_A+r_B の最小値がS_θの最小値となる。

ここで，$\angle \mathrm{OO}_A\mathrm{O}_B=\alpha$，$\angle \mathrm{OO}_B\mathrm{O}_A=\beta$ とおくと

正弦定理より $\dfrac{1-r_A}{\sin\beta}=\dfrac{1-r_B}{\sin\alpha}=\dfrac{r_A+r_B}{\sin\theta}$ が成り立つので

$1-r_A=\dfrac{\sin\beta}{\sin\theta}\left(r_A+r_B\right)$ …②，$1-r_B=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\theta}\left(r_A+r_B\right)$ …③

②＋③より $2-(r_A+r_B)=\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\theta}\left(r_A+r_B\right)$ から $r_A+r_B=\dfrac{2\sin\theta}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\theta}$

$\alpha+\beta=\pi-\theta$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$ であるから

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta&=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\&=2\sin\frac{\pi-\theta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\&=2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\&\leqq 2\cos\frac{\theta}{2}\qquad\text{（等号成立は}\alpha=\beta\text{のとき）}\end{aligned}$$

となるので，r_A+r_Bが最小となるのは $\alpha=\beta=\dfrac{\pi-\theta}{2}$ のときで，

このとき $r_A=r_B$ であるから

$$2r_A=\frac{2\sin\theta}{2\cos\frac{\theta}{2}+\sin\theta}\Leftrightarrow 2r_A=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$ より

$$r_A=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}$$ となる。

よって $S_\theta=2\pi {r_A}^2=2\pi\left(\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{1+\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2$ である。

(2) $0<\theta \leqq \pi$ で考えれば十分であるから

$0<\sin\dfrac{\theta}{2} \leqq 1$ であり，

$$S_\theta = 2\pi\left(\frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{1+\sin\dfrac{\theta}{2}}\right)^2 = 2\pi\left(1-\frac{1}{1+\sin\dfrac{\theta}{2}}\right)^2 \leqq 2\pi\left(1-\frac{1}{1+1}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$$

（等号成立は $\theta=\pi$ のとき）

よって，S_θ の最大値は $\dfrac{\pi}{2}$