［ 東京工業大学 2005 年後期 $\boxed{1}$ ］

数列$\{a_m\}$（ただし$a_m = m$とする）に対し $b_n = \sum_{m=1}^{n} a_m$ とおく。

(1) $0 < r < 1$ とするとき，$\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ および $\lim_{n\to\infty} n^2 r^n = 0$ となることを証明せよ。

(2) $S_m = a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_m r^m$，$T_n = b_1 r + b_2 r^2 + \cdots + b_n r^n$ とおくとき，$\lim_{m\to\infty} S_m$ および $\lim_{m\to\infty} T_m$ を求めよ。

(1) $r = \dfrac{1}{1+h}$ $(h > 0)$ とおく。

二項定理より $(1+h)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 h + {}_n\mathrm{C}_2 h^2 + {}_n\mathrm{C}_3 h^3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n h^n$ …①

①の各項は正なので $(1+h)^n > {}_n\mathrm{C}_2 h^2 \iff (1+h)^n > \dfrac{n(n-1)}{2} h^2$

$$\iff 0 < \left(\frac{1}{1+h}\right)^n < \frac{2}{n(n-1)h^2}$$

$$\iff 0 < n\left(\frac{1}{1+h}\right)^n < \frac{2}{(n-1)h^2}$$

$$\iff 0 < nr^n < \frac{2}{(n-1)h^2}$$

ここで，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{2}{(n-1)h^2} = 0$ であるから，はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$

また，①より $(1+h)^n > {}_n\mathrm{C}_3 h^3 \iff (1+h)^n > \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} h^3$

$$\iff 0 < \left(\frac{1}{1+h}\right)^n < \frac{6}{n(n-1)(n-2)h^3}$$

$$\iff 0 < n^2\left(\frac{1}{1+h}\right)^n < \frac{6}{\left(1-\frac{1}{n}\right)(n-2)h^3}$$

$$\iff 0 < n^2 r^n < \frac{6}{\left(1-\frac{1}{n}\right)(n-2)h^3}$$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{6}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)(n-2)h^3}=0$ であるから，はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty} n^2r^n=0$

(2)（ⅰ）$r=1$ のとき

$$S_m=a_1+a_2+\cdots+a_m=\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{m}k=\frac{m(m+1)}{2}\overset{m\to\infty}{\to}\infty$$

$$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{n=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\overset{n\to\infty}{\to}\infty$$

より，このとき極限値は存在しない。

（ⅱ）$r\neq 1$ のとき

$$S_m=r+2r^2+\cdots+mr^m$$

$$rS_m=r^2+2r^3+\cdots+mr^{m+1}$$

より $(1-r)S_m=r+r^2+\cdots+r^m-mr^{m+1}=\dfrac{r(1-r^m)}{1-r}-mr^{m+1}$

$$S_m=\frac{r(1-r^m)}{(1-r)^2}-\frac{mr^{m+1}}{1-r}$$

また，$b_1=a_1$，$b_n-b_{n-1}=a_n$ $(n\geqq 2)$ であるから

$$T_n=b_1r+b_2r^2+\cdots+b_nr^n$$

$$rT_n=b_1r^2+b_2r^3+\cdots+b_nr^{n+1}$$

より $(1-r)T_n=b_1r+(b_2-b_1)r^2+(b_3-b_2)r^3+\cdots+(b_n-b_{n-1})r^n-b_nr^{n+1}$

$$=a_1r+a_2r^2+\cdots+a_nr^n-\frac{n(n+1)}{2}r^{n+1}=S_n-\frac{n(n+1)}{2}r^{n+1}$$

$$T_n=\frac{S_n}{1-r}-\frac{n(n+1)r^{n+1}}{2(1-r)}$$

$|r|<1$ のとき，(1)の結果より $\lim_{n\to\infty}|mr^{m+1}|=\lim_{n\to\infty}|n(n+1)r^{n+1}|=0$ なので

$\lim_{m\to\infty}S_m=\dfrac{r}{(1-r)^2}$，$\lim_{n\to\infty}T_n=\dfrac{\dfrac{r}{(1-r)^2}}{1-r}=\dfrac{r}{(1-r)^3}$ となる。

したがって，$|r|\geqq 1$ のとき $\lim_{m\to\infty}S_m$，$\lim_{n\to\infty}T_n$ は存在しない。

$|r|<1$ のとき $\lim_{m\to\infty}S_m=\dfrac{r}{(1-r)^2}$，$\lim_{n\to\infty}T_n=\dfrac{r}{(1-r)^3}$ となる。