[東京工業大学 2005 年 前期 $\boxed{1}$]

e を自然対数の底とし，数列$\{a_n\}$を次式で定義する。

$$a_n = \int_1^e (\log x)^n\,dx \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

(1) $n \geqq 3$ のとき，次の漸化式を示せ。

$$a_n = (n-1)(a_{n-2} - a_{n-1})$$

(2) $n \geqq 1$ に対し $a_n > a_{n+1} > 0$ なることを示せ。

(3) $n \geqq 2$ のとき，以下の不等式が成立することを示せ。

$$a_{2n} < \frac{3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)}{4\cdot 6\cdots\cdots(2n)}(e-2)$$

(1) 部分積分をすることにより

$$a_n = \int_1^e (\log x)^n\,dx$$

$$= \int_1^e (x)'(\log x)^n\,dx$$

$$= \Big[x(\log x)^n\Big]_1^e - \int_1^e x\cdot n(\log x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= e - n\int_1^e (\log x)^{n-1}\,dx$$

$= e - na_{n-1}$ となる。

よって $a_n = e - na_{n-1}$ $(n \geqq 2)$ …① を得る。

また，$a_{n-1} = e-(n-1)a_{n-2}$ $(n \geqq 3)$ …② であるから

①−②より $a_n - a_{n-1} = -na_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$ なので

$a_n = (n-1)(a_{n-2} - a_{n-1})$ $(n \geqq 3)$ を得る。

(2) $1 \leqq x \leqq e$ において $0 \leqq \log x \leqq 1$ であるから $0 \leqq \left(\log x\right)^{n+1} \leqq \left(\log x\right)^n$ が成り立つ。

$1 < x < e$ において等号は成立しないのでこの区間で積分すると

$$\int_1^e 0\,dx < \int_1^e (\log x)^{n+1}\,dx < \int_1^e (\log x)^n\,dx$$

すなわち $0 < a_{n+1} < a_n$ $(n \geqq 1)$ を得る。

(3) (2)より $a_{n-1} > a_n \ (n \geqq 2)$ であり，(1)の結果にこれを利用すると

$a_n = (n-1)(a_{n-2} - a_{n-1}) < (n-1)\left(a_{n-2} - a_n\right)$ であるから

$a_n < \dfrac{n-1}{n} a_{n-2} \ (n \geqq 3)$ となる。

この式において $n \to 2n$ とすると

$a_{2n} < \dfrac{2n-1}{2n} a_{2n-2} \ (n \geqq 2)$ であり，これを繰り返し用いると

$$a_{2n} < \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} a_{2n-2} < \cdots < \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots\cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot a_2$$

ここで，$a_2 = e - 2a_1$

$$= e - 2\int_1^e \log x \, dx$$

$$= e - 2\left\{\left[x(\log x)\right]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx\right\}$$

$$= e - 2\left\{e - (e-1)\right\}$$

$$= e - 2$$

したがって $a_{2n} < \dfrac{3 \cdot 5 \cdots\cdots (2n-1)}{4 \cdot 6 \cdots\cdots (2n)} (e-2)$ が成り立つ。

[注]

$\int \log x \, dx = x \log x - x + C$ （C ：積分定数）は公式としてもよいだろう。

$a_n = (n-1)(a_{n-2} - a_{n-1})$ から a_{n-1} を単純に消去すると a_n, a_{n+2} の関係式として

$a_n < (n-1) a_{n-2}$ を得られるのだが，これでは評価が甘過ぎて利用できない。

[東京工業大学 2005 年前期 $\boxed{2}$]

☆ ☆

1 から 6 までの目が $\frac{1}{6}$ の確率で出るサイコロを振り，1 回目に出る目を α，2 回目に出る目を β とする。2 次式 $(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+sx+t$ を $f(x)$ とおき $f(x)^2=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ とする。

(1) s および t の期待値を求めよ。

(2) a, b, c および d の期待値を求めよ。

☆ ☆

(1) $(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+sx+t$ より $s=-(\alpha+\beta)$，$t=\alpha\beta$

$E(\alpha)=E(\beta)=\sum_{k=1}^{6}\frac{k}{6}=\frac{7}{2}$ …①

$E(\alpha^2)=E(\beta^2)=\sum_{k=1}^{6}\frac{k^2}{6}=\frac{91}{6}$ …②

であるので，s, t の期待値を $E(s), E(t)$ として①，②を利用すると

$$E(s)=E\left(-(\alpha+\beta)\right)=-E\left(\alpha+\beta\right)=-\left\{E\left(\alpha\right)+E\left(\beta\right)\right\}=-\left(\frac{7}{2}+\frac{7}{2}\right)=-7$$

さらに，α,β は独立であるので

$$E(t)=E\left(\alpha\beta\right)=E\left(\alpha\right)\cdot E\left(\beta\right)=\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$$ となる。

(2) $(x^2+sx+t)^2=x^4+2sx^3+(s^2+2t)x^2+2stx+t^2$ であるから

$a=2s=-2(\alpha+\beta)$

$b=s^2+2t=(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2$

$c=2st=-2(\alpha+\beta)\alpha\beta=-2(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)$

$d=t^2=\alpha^2\beta^2$ である。

よって

$$E(a)=E\left(-2(\alpha+\beta)\right)=-2E\left(\alpha+\beta\right)=-2\cdot 7=-14$$

$$E(b)=E\left(\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2\right)=E\left(\alpha^2\right)+4E\left(\alpha\right)E\left(\beta\right)+E\left(\beta^2\right)=2E\left(\alpha^2\right)+4\left\{E\left(\alpha\right)\right\}^2$$

$$=2\cdot\frac{91}{6}+4\left\{\frac{7}{2}\right\}^2=\frac{238}{3}$$

α, β が対称であること，さらにα, β が独立なので，α^2 と β，α と β^2 も独立になるから

$$E(c) = E\left(-2(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2)\right) = -2 \cdot 2E\left(\alpha^2\right)E\left(\beta\right) = -4 \cdot \frac{91}{6} \cdot \frac{7}{2} = -\frac{637}{3}$$

$$E(d) = E\left(\alpha^2\beta^2\right) = E\left(\alpha^2\right) \cdot E\left(\beta^2\right) = \left(\frac{91}{6}\right)^2 = \frac{8281}{36}$$

[注] 確率変数 X, Y と定数 a, b に対し，

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

$E(XY) = E(X)E(Y)$（こちらは X と Y が独立のときのみ）

が成り立つ。

[東京工業大学 2005 年前期 $\boxed{3}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

D を半径 1 の円盤，C を xy 平面の原点を中心とする半径 1 の円周とする。D が次の条件(a)，(b)を共に満たしながら xyz 空間内を動くとき，D が通過する部分の体積を求めよ。

(a)　D の中心は C 上にある。

(b)　D が乗っている平面は常にベクトル $(0, 1, 0)$ と直交する。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

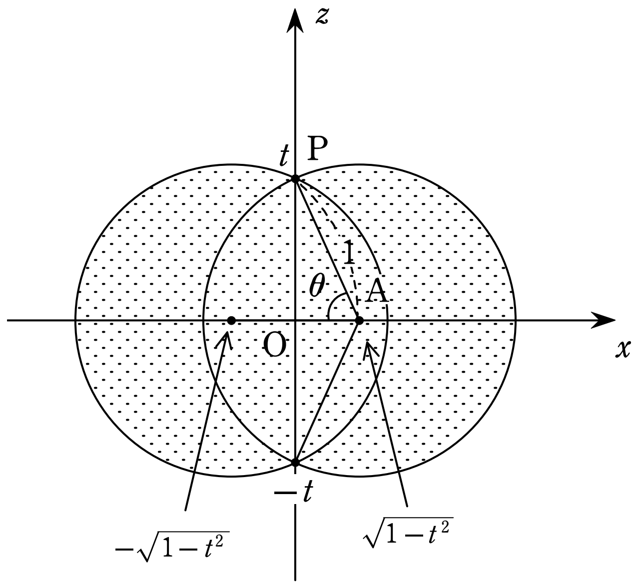
D が通過してできる立体を平面 $y=t\ (0\leqq t\leqq 1)$ で切断した図形を xz 平面に正射影したものは，図の打点部分のようになる。

これは 2 円 $\left(x\pm\sqrt{1-t^2}\right)^2+z^2=1$ の和集合（内部を含む）であり，

$t=\sin\theta\ \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$（$\theta=\angle\mathrm{PAO}$）とおくと断面積 S は

$$S=2\times\left\{\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot(2\pi-2\theta)+\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin 2\theta\right\}$$

$$=2(\pi-\theta)+\sin 2\theta$$ となる。



求める体積を V とおくと，対称性より

$$V=2\times\int_0^1 S\,dt$$

ここで，$t=\sin\theta$ より $dt=\cos\theta d\theta$

$t:0\to 1$ のとき $\theta:0\to\dfrac{\pi}{2}$ なので

$$V=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} S\cos\theta d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{2(\pi-\theta)+\sin 2\theta\right\}\cos\theta d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-\theta)\cos\theta d\theta+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$=4\left\{\Big[(\pi-\theta)\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\sin\theta\right)d\theta\right\}+4\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=4\left\{\frac{\pi}{2}-\Big[\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\right\}+\frac{4}{3}=2\pi+4+\frac{4}{3}=2\pi+\frac{16}{3}$$

[東京工業大学 2005 年前期 $\boxed{4}$]

実数 x, y が $x^2+y^2 \leqq 1$ を満たしながら変化するとする。

(1) $s=x+y,\ t=xy$ とするとき，点 (s, t) の動く範囲を st 平面上に図示せよ。

(2) 負でない整数 $m \geqq 0$ をとるとき，$xy+m(x+y)$ の最大値，最小値を m を用いて表せ。

(1) $x^2+y^2 \leqq 1$ …①

$s=x+y,\ t=xy$ に対し x, y を 2 解とする X の 2 次方程式は $X^2-sX+t=0$ …②

x, y が実数であるから，②の判別式を D とすると

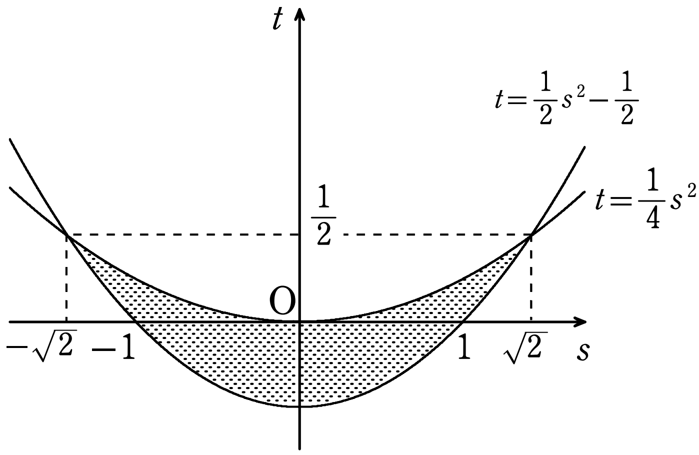
$D=s^2-4t \geqq 0$ …③

① ⇔ $(x+y)^2-2xy \leqq 1$ ⇔ $s^2-2t \leqq 1$ …④

③かつ④より $\dfrac{1}{2}s^2-\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq \dfrac{1}{4}s^2$

よって，点 (s, t) の動く範囲を st 平面上に図示すると，図の打点部分のようになる。

ただし，境界線上の点も含む。



(2) $xy+m(x+y)=t+ms$

$=k$ とおくと

$t=-ms+k$ …⑤ であり

これは，傾き $-m\ (\leqq 0)$，y 切片 k の直線を表す。

この直線が(1)の領域と共有点をもつときの，k の取り得る値の範囲を求める。

まず，$-m\ (\leqq 0)$ であるから，⑤が点$\left(\sqrt{2}, \dfrac{1}{2}\right)$を通るとき最大になり，

最大値は $k=\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}m$

また，点$\left(-\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$における $t=\dfrac{1}{2}s^2-\dfrac{1}{2}$ の接線の傾きは $t'\big|_{s=-\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$ なので

$-m \leqq -\sqrt{2}$ すなわち $m \geqq \sqrt{2}$ のとき，①が点$\left(-\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$を通るとき最小になり，

最小値は $k=\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}m$

$0 \leqq m \leqq \sqrt{2}$ のとき，①が $t=\dfrac{1}{2}s^2-\dfrac{1}{2}$ と接するときに k は最小になるので

連立させて $\dfrac{1}{2}s^2-\dfrac{1}{2}=-ms+k \ \Leftrightarrow\ (s+m)^2=m^2+2k+1$

よって $s=-m$ で接し，このとき $m^2+2k+1=0$ から $k=-\dfrac{m^2+1}{2}$ が最小値となる。

以上より

最大値：$\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}m$

最小値：$m \geqq \sqrt{2}$ のとき $\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}m$

$0 \leqq m \leqq \sqrt{2}$ のとき $-\dfrac{m^2+1}{2}$