[東京工業大学 2005 年 前期 $\boxed{1}$]

e を自然対数の底とし，数列 $\{a_n\}$ を次式で定義する。

$$a_n = \int_1^e (\log x)^n \, dx \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

(1) $n \geqq 3$ のとき，次の漸化式を示せ。

$$a_n = (n-1)(a_{n-2} - a_{n-1})$$

(2) $n \geqq 1$ に対し $a_n > a_{n+1} > 0$ なることを示せ。

(3) $n \geqq 2$ のとき，以下の不等式が成立することを示せ。

$$a_{2n} < \frac{3 \cdot 5 \cdots\cdots (2n-1)}{4 \cdot 6 \cdots\cdots (2n)} (e-2)$$

[東京工業大学 2005 年前期 $\boxed{2}$]

1 から 6 までの目が $\dfrac{1}{6}$ の確率で出るサイコロを振り，1 回目に出る目を α ，2 回目に出る目を β とする。2 次式 $(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+sx+t$ を $f(x)$ とおき $f(x)^2=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ とする。

(1) s および t の期待値を求めよ。

(2) a, b, c および d の期待値を求めよ。

[東京工業大学 2005 年前期 $\boxed{3}$]

☆ ☆

D を半径 1 の円盤，C を xy 平面の原点を中心とする半径 1 の円周とする。D が次の条件 (a)，(b) を共に満たしながら xyz 空間内を動くとき，D が通過する部分の体積を求めよ。

(a) D の中心は C 上にある。

(b) D が乗っている平面は常にベクトル $(0, 1, 0)$ と直交する。

☆ ☆

[東京工業大学 2005 年前期 $\boxed{4}$]

実数 $x,\ y$ が $x^2+y^2 \leqq 1$ を満たしながら変化するとする。

(1) $s=x+y,\ t=xy$ とするとき，点 $(s,\ t)$ の動く範囲を st 平面上に図示せよ。

(2) 負でない整数 $m \geqq 0$ をとるとき，$xy+m(x+y)$ の最大値，最小値を m を用いて表せ。