[東京工業大学 2005 年前期 $\boxed{4}$]

実数 $x,\ y$ が $x^2+y^2 \leqq 1$ を満たしながら変化するとする。

(1) $s=x+y,\ t=xy$ とするとき，点 $(s,\ t)$ の動く範囲を st 平面上に図示せよ。

(2) 負でない整数 $m \geqq 0$ をとるとき，$xy+m(x+y)$ の最大値，最小値を m を用いて表せ。

(1) $x^2+y^2 \leqq 1$ …①

$s=x+y,\ t=xy$ に対し $x,\ y$ を 2 解とする X の 2 次方程式は $X^2-sX+t=0$ …②

$x,\ y$ が実数であるから，②の判別式を D とすると

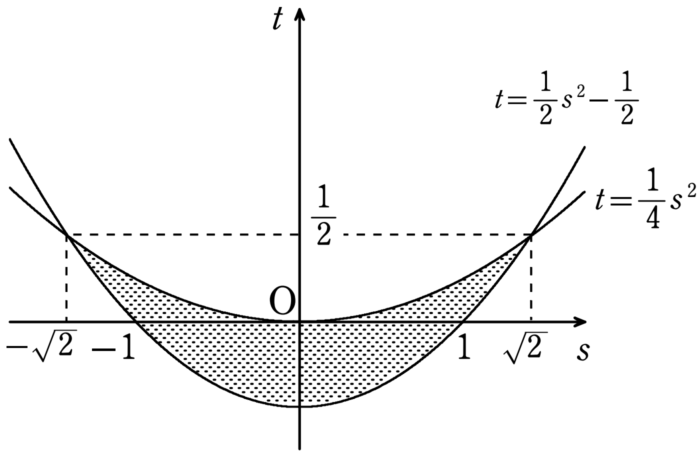
$D=s^2-4t \geqq 0$ …③

① ⇔ $(x+y)^2-2xy \leqq 1$ ⇔ $s^2-2t \leqq 1$ …④

③かつ④より $\dfrac{1}{2}s^2-\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq \dfrac{1}{4}s^2$

よって，点 $(s,\ t)$ の動く範囲を st 平面上に図示すると，図の打点部分のようになる。

ただし，境界線上の点も含む。



(2) $xy+m(x+y)=t+ms$

$=k$ とおくと

$t=-ms+k$ …⑤ であり

これは，傾き $-m\ (\leqq 0)$，y 切片 k の直線を表す。

この直線が(1)の領域と共有点をもつときの，k の取り得る値の範囲を求める。

まず，$-m\ (\leqq 0)$ であるから，⑤が点 $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通るとき最大になり，

最大値は $k=\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}m$

また，点$\left(-\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$における $t=\dfrac{1}{2}s^2-\dfrac{1}{2}$ の接線の傾きは $t'\big|_{s=-\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$ なので

$-m \leqq -\sqrt{2}$ すなわち $m \geqq \sqrt{2}$ のとき，①が点$\left(-\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$を通るとき最小になり，

最小値は $k=\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}m$

$0 \leqq m \leqq \sqrt{2}$ のとき，①が $t=\dfrac{1}{2}s^2-\dfrac{1}{2}$ と接するときにkは最小になるので

連立させて $\dfrac{1}{2}s^2-\dfrac{1}{2}=-ms+k \Leftrightarrow (s+m)^2=m^2+2k+1$

よって $s=-m$ で接し，このとき $m^2+2k+1=0$ から $k=-\dfrac{m^2+1}{2}$ が最小値となる。

以上より

最大値：$\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}m$

最小値：$m \geqq \sqrt{2}$ のとき $\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}m$

$0 \leqq m \leqq \sqrt{2}$ のとき $-\dfrac{m^2+1}{2}$