[東京工業大学 2005 年前期 3]

☆ ☆

D を半径 1 の円盤，C を xy 平面の原点を中心とする半径 1 の円周とする。D が次の条件(a)，(b)を共に満たしながら xyz 空間内を動くとき， D が通過する部分の体積を求めよ。

(a) D の中心は C 上にある。

(b) D が乗っている平面は常にベクトル $(0, 1, 0)$ と直交する。

☆ ☆

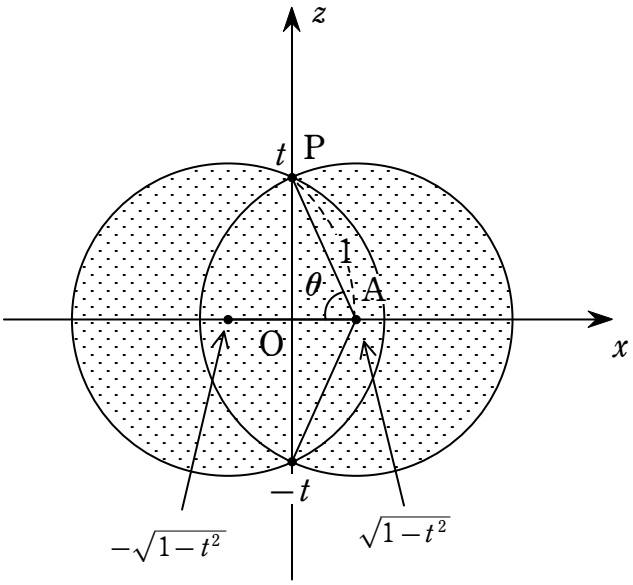
D が通過してできる立体を平面 $y=t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ で切断した図形を xz 平面に正射影したものは，図の打点部分のようになる。

これは 2 円 $\left(x \pm \sqrt{1-t^2}\right)^2 + z^2 = 1$ の和集合（内部を含む）であり，

$t = \sin\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$（$\theta = \angle \mathrm{PAO}$）とおくと断面積 S は

$$S = 2 \times \left\{ \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot (2\pi - 2\theta) + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin 2\theta \right\}$$

$$= 2(\pi - \theta) + \sin 2\theta \quad \text{となる。}$$



求める体積を V とおくと，対称性より

$$V = 2 \times \int_0^1 S\, dt$$

ここで， $t = \sin\theta$ より $dt = \cos\theta d\theta$

$t : 0 \to 1$ のとき $\theta : 0 \to \dfrac{\pi}{2}$ なので

$$V = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} S\cos\theta d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{2(\pi - \theta) + \sin 2\theta\} \cos\theta d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - \theta)\cos\theta d\theta + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$= 4\left\{ \left[(\pi - \theta)\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin\theta)\, d\theta \right\} + 4\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 4\left\{ \frac{\pi}{2} - \left[\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right\} + \frac{4}{3} = 2\pi + 4 + \frac{4}{3} = 2\pi + \frac{16}{3}$$