[東京工業大学 2005 年前期 $\boxed{2}$]

☆────────────────────☆

1 から 6 までの目が $\dfrac{1}{6}$ の確率で出るサイコロを振り，1 回目に出る目を α，2 回目に出る目を β とする。2 次式 $(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+sx+t$ を $f(x)$ とおき $f(x)^2=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ とする。

(1) s および t の期待値を求めよ。

(2) a, b, c および d の期待値を求めよ。

☆────────────────────☆

(1) $(x-\alpha)(x-\beta)=x^2+sx+t$ より $s=-(\alpha+\beta)$，$t=\alpha\beta$

$E\left(\alpha\right)=E\left(\beta\right)=\sum_{k=1}^{6}\dfrac{k}{6}=\dfrac{7}{2}$ …①

$E\left(\alpha^2\right)=E\left(\beta^2\right)=\sum_{k=1}^{6}\dfrac{k^2}{6}=\dfrac{91}{6}$ …②

であるので，s, t の期待値を $E(s), E(t)$ として①，②を利用すると

$$E(s)=E\left(-(\alpha+\beta)\right)=-E\left(\alpha+\beta\right)=-\left\{E\left(\alpha\right)+E\left(\beta\right)\right\}=-\left(\frac{7}{2}+\frac{7}{2}\right)=-7$$

さらに，α, β は独立であるので

$$E(t)=E\left(\alpha\beta\right)=E\left(\alpha\right)\cdot E\left(\beta\right)=\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$$ となる。

(2) $(x^2+sx+t)^2=x^4+2sx^3+(s^2+2t)x^2+2stx+t^2$ であるから

$a=2s=-2(\alpha+\beta)$

$b=s^2+2t=(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2$

$c=2st=-2(\alpha+\beta)\alpha\beta=-2(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)$

$d=t^2=\alpha^2\beta^2$ である。

よって

$$E(a)=E\left(-2(\alpha+\beta)\right)=-2E\left(\alpha+\beta\right)=-2\cdot 7=-14$$

$$E(b)=E\left(\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2\right)=E\left(\alpha^2\right)+4E\left(\alpha\right)E\left(\beta\right)+E\left(\beta^2\right)=2E\left(\alpha^2\right)+4\left\{E\left(\alpha\right)\right\}^2$$

$$=2\cdot\frac{91}{6}+4\left\{\frac{7}{2}\right\}^2=\frac{238}{3}$$

α,β が対称であること，さらに α,β が独立なので，α^2 と β，α と β^2 も独立になるから

$$E(c)=E\left(-2(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)\right)=-2\cdot 2E\left(\alpha^2\right)E\left(\beta\right)=-4\cdot\frac{91}{6}\cdot\frac{7}{2}=-\frac{637}{3}$$

$$E(d)=E\left(\alpha^2\beta^2\right)=E\left(\alpha^2\right)\cdot E\left(\beta^2\right)=\left(\frac{91}{6}\right)^2=\frac{8281}{36}$$

[注] 確率変数 X, Y と定数 a, b に対し，

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$$

$E(XY)=E(X)E(Y)$（こちらは X と Y が独立のときのみ）

が成り立つ。