[ 東京工業大学 2005 年 前期 $\boxed{1}$ ]

☆ ☆

$e$ を自然対数の底とし，数列 $\{a_n\}$ を次式で定義する。

$$a_n=\int_1^e(\log x)^n\,dx\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

(1) $n\geqq 3$ のとき，次の漸化式を示せ。

$$a_n=(n-1)(a_{n-2}-a_{n-1})$$

(2) $n\geqq 1$ に対し $a_n>a_{n+1}>0$ なることを示せ。

(3) $n\geqq 2$ のとき，以下の不等式が成立することを示せ。

$$a_{2n}<\frac{3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)}{4\cdot 6\cdots\cdots(2n)}(e-2)$$

☆ ☆

(1) 部分積分をすることにより

$$a_n=\int_1^e(\log x)^n\,dx$$

$$=\int_1^e(x)'(\log x)^n\,dx$$

$$=\Big[x(\log x)^n\Big]_1^e-\int_1^e x\cdot n(\log x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$=e-n\int_1^e(\log x)^{n-1}\,dx$$

$=e-na_{n-1}$ となる。

よって $a_n=e-na_{n-1}$ $(n\geqq 2)$ …① を得る。

また，$a_{n-1}=e-(n-1)a_{n-2}$ $(n\geqq 3)$ …② であるから

①−②より $a_n-a_{n-1}=-na_{n-1}+(n-1)a_{n-2}$ なので

$$a_n=(n-1)(a_{n-2}-a_{n-1})\ (n\geqq 3)$$ を得る。

(2) $1\leqq x\leqq e$ において $0\leqq\log x\leqq 1$ であるから $0\leqq(\log x)^{n+1}\leqq(\log x)^n$ が成り立つ。

$1<x<e$ において等号は成立しないのでこの区間で積分すると

$$\int_1^e 0\,dx<\int_1^e(\log x)^{n+1}\,dx<\int_1^e(\log x)^n\,dx$$

すなわち $0<a_{n+1}<a_n$ $(n\geqq 1)$ を得る。

(3) (2)より $a_{n-1} > a_n \ (n \geqq 2)$ であり，(1)の結果にこれを利用すると

$a_n = (n-1)(a_{n-2} - a_{n-1}) < (n-1)\left(a_{n-2} - a_n\right)$ であるから

$a_n < \dfrac{n-1}{n} a_{n-2} \ (n \geqq 3)$ となる。

この式において $n \to 2n$ とすると

$a_{2n} < \dfrac{2n-1}{2n} a_{2n-2} \ (n \geqq 2)$ であり，これを繰り返し用いると

$$a_{2n} < \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} a_{2n-2} < \cdots < \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot a_2$$

ここで，$a_2 = e - 2a_1$

$$= e - 2\int_1^e \log x \, dx$$

$$= e - 2\left\{\left[x(\log x)\right]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx\right\}$$

$$= e - 2\left\{e - (e-1)\right\}$$

$$= e - 2$$

したがって $a_{2n} < \dfrac{3 \cdot 5 \cdots\cdots (2n-1)}{4 \cdot 6 \cdots\cdots (2n)}(e-2)$ が成り立つ。

[注]

$\int \log x \, dx = x \log x - x + C$ （$C$ ：積分定数）は公式としてもよいだろう。

$a_n = (n-1)(a_{n-2} - a_{n-1})$ から $a_{n-1}$ を単純に消去すると $a_n, a_{n+2}$ の関係式として

$a_n < (n-1)a_{n-2}$ を得られるのだが，これでは評価が甘過ぎて利用できない。