[東京工業大学 2004 年後期 $\boxed{1}$]

場所 1 から場所 n に異なる n 個のものが並んでいる。これらを並べ替えてどれもが元の位置にならないようにする方法の総数を $D(n)$ とする。ただし，$n \geqq 2$ とする。

(1) $n=4$ の場合の並べ方をすべて書き出して，$D(4)$ を求めよ。

(2) $n \geqq 4$ に対して $D(n)=(n-1)\{D(n-2)+D(n-1)\}$ を証明せよ。

---

(1) 異なる n 個のものを $1, 2, \cdots, n$ で表し，はじめの並び方を $(1, 2, \cdots, n)$ とする。

$n=4$ のとき，題意の並べ方について

一番左に 2 があるものは $(2, 1, 4, 3), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3),$

3 があるものは $(3, 1, 4, 2), (3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1),$

4 があるものは $(4, 1, 2, 3), (4, 3, 1, 2), (4, 3, 2, 1)$

であるから $D(4)=9$

(2) 1 番目が k であるとする。…（＊）

このとき，k 番目 $(2 \leqq k \leqq n)$ が 1 になっているか，そうでないかで場合分けをして考える。

（i）k 番目が 1 であるとき

1 番目が k，k 番目が 1 なので，1 番目と k 番目の置換が起きており，

その 2 ヶ所以外の $n-2$ ヶ所に並ぶものは 2，3，…，$k-1$，$k+1$，…，n である。

これらの数字は何番目かという数字と同じものがそのまま残っているので，

$n-2$ 個のどれもが元の位置にならないようにする方法の総数なので $D(n-2)$ 通り。

（ii）k 番目が 1 でないとき

ある h 番目が 1 であるとすると

1 番目，	2 番目，	…，	h 番目，	…，	k 番目，	…，	n 番目
k，	□，	…，	1，	…，	○，	…，	△

というように並んでいる。

この場合，1 番目と k 番目以外の $n-2$ ヶ所の入るものと何番目かという数字は，すべては一致していないので並び替えの総数は $D(n-2)$ とはならない。

そこで，（k という数を含む）2 から n までの数を 2 番目から n 番目までの位置にどれもが元の位置にならないように並び替え，k という数があるところを 1 に置き換える。これで k 番目は 1 ではなく，1 から n までの数がどれもが元の位置にならないように並ぶことになる。k という数があるところを 1 に置き換える操作は 1 通りであるから，この並べ方の総数は $D(n-1)$ 通りある。

(∗)より（ⅰ)，（ⅱ)はそれぞれ $n-1$ 通りずつあるので

$$D(n)=(n-1)\{D(n-2)+D(n-1)\}$$

となる。

[東京工業大学 2004 年後期 $\boxed{2}$]

n を 2 以上の偶数とする。2 つの曲線 $C_1 : y = x^n$ と $C_2 : y = n^x$ について，次の問いに答えよ。

(1) C_1 と C_2 は $x < 0$ において，ただ 1 つの点 P_n で交わることを示せ。

(2) C_1 と C_2 の交点の個数を求めよ。

(3) P_n の $n \to \infty$ のときの極限の位置を求めよ。

---

(1) $y = x^n$ は $x \leqq 0$ において単調減少であり， $y = n^x$ は $x \leqq 0$ において単調増加である。

よって， $f(x) = x^n - n^x$ は $x \leqq 0$ において単調減少となる。

ここで， $n \geqq 2$ より $f(-1) = 1 - \dfrac{1}{n} > 0$， $f(0) = -1 < 0$ であるので

$f(x) = 0$ を満たす x が $-1 < x < 0$ の範囲にただ 1 つ存在する。

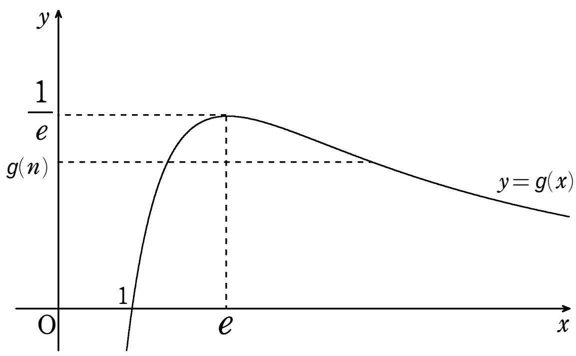
すなわち，題意は示された。

(2) $x > 0$ において $x^n = n^x \Leftrightarrow \dfrac{\log x}{x} = \dfrac{\log n}{n}$ であり，

$g(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とおくと $g'(x) = \dfrac{1 - \log x}{x^2}$

$\displaystyle\lim_{x \to +0} g(x) = -\infty$， $\displaystyle\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$ であることから

$y = g(x)$ のグラフの概形は右図の通りである。



よって，2 以上の任意の偶数 n について

$g(x) = g(n)$ を満たす x は常に 2 個ずつ存在する。

したがって，求める交点の個数は 3 個。

(3) $y = n^x$ を y 軸に関して対称移動させたグラフ $y = n^{-x}$ を考える。

$y = x^n$ と $y = n^{-x}$ の $x > 0$ における交点を Q_n とおくと， P_n と Q_n は y 軸に関して対称である。

$x > 0$ のもとで， $x^n = n^{-x} \Leftrightarrow g(x) = -g(n)$ となり，

$x^n = n^{-x}$ を満たす x を x_n とすると

$g(n)$ は $n \to \infty$ のとき正の方向から 0 に収束し，

$g(x) = -g(n)$ であるから

$g(x_n)$ は $n \to \infty$ のとき負の方向から 0 に収束する。

$g(x)$ の連続性より $\lim_{n \to \infty} x_n = 1$

また，Q_n の y 座標を y_n とすると

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} n^{-x_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{x_n}} = 0$$

よって，対称性から

P_n の $n \to \infty$ のときの極限の位置は $(-1, 0)$