[東京工業大学 2004 年後期 $\boxed{2}$]

n を 2 以上の偶数とする。2 つの曲線 $C_1 : y = x^n$ と $C_2 : y = n^x$ について，次の問いに答えよ。

(1) C_1 と C_2 は $x<0$ において，ただ 1 つの点 P_n で交わることを示せ。

(2) C_1 と C_2 の交点の個数を求めよ。

(3) P_n の $n \to \infty$ のときの極限の位置を求めよ。

---

(1) $y = x^n$ は $x \leqq 0$ において単調減少であり，$y = n^x$ は $x \leqq 0$ において単調増加である。

よって，$f(x) = x^n - n^x$ は $x \leqq 0$ において単調減少となる。

ここで，$n \geqq 2$ より $f(-1) = 1 - \dfrac{1}{n} > 0$，$f(0) = -1 < 0$ であるので

$f(x) = 0$ を満たす x が $-1 < x < 0$ の範囲にただ 1 つ存在する。

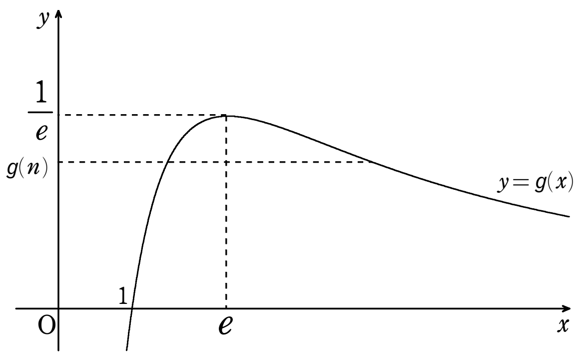
すなわち，題意は示された。

(2) $x > 0$ において $x^n = n^x \Leftrightarrow \dfrac{\log x}{x} = \dfrac{\log n}{n}$ であり，

$g(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とおくと $g'(x) = \dfrac{1 - \log x}{x^2}$

$\lim\limits_{x \to +0} g(x) = -\infty$，$\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$ であることから

$y = g(x)$ のグラフの概形は右図の通りである。



よって，2 以上の任意の偶数 n について

$g(x) = g(n)$ を満たす x は常に 2 個ずつ存在する。

したがって，求める交点の個数は 3 個。

(3) $y = n^x$ を y 軸に関して対称移動させたグラフ $y = n^{-x}$ を考える。

$y = x^n$ と $y = n^{-x}$ の $x > 0$ における交点を Q_n とおくと，P_n と Q_n は y 軸に関して対称である。

$x > 0$ のもとで，$x^n = n^{-x} \Leftrightarrow g(x) = -g(n)$ となり，

$x^n = n^{-x}$ を満たす x を x_n とすると

$g(n)$ は $n\to\infty$ のとき正の方向から 0 に収束し，

$g(x)=-g(n)$　であるから

$g(x_n)$ は $n\to\infty$ のとき負の方向から 0 に収束する。

$g(x)$ の連続性より　$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$

また，Q_n の y 座標を y_n とすると

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} n^{-x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{x_n}} = 0$$

よって，対称性から

P_n の $n\to\infty$ のときの極限の位置は　$(-1,\ 0)$