[東京工業大学 2004 年後期 $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

場所 1 から場所 n に異なる n 個のものが並んでいる。これらを並べ替えてどれもが元の位置にならないようにする方法の総数を $D(n)$ とする。ただし，$n \geqq 2$ とする。

(1) $n=4$ の場合の並べ方をすべて書き出して，$D(4)$ を求めよ。

(2) $n \geqq 4$ に対して $D(n)=(n-1)\{D(n-2)+D(n-1)\}$ を証明せよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) 異なる n 個のものを $1, 2, \cdots, n$ で表し，はじめの並び方を $(1, 2, \cdots, n)$ とする。

$n=4$ のとき，題意の並べ方について

一番左に 2 があるものは　$(2, 1, 4, 3), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3),$

3 があるものは　$(3, 1, 4, 2), (3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1),$

4 があるものは　$(4, 1, 2, 3), (4, 3, 1, 2), (4, 3, 2, 1)$

であるから $D(4)=9$

(2) 1 番目が k であるとする。…（＊）

このとき，k 番目 $(2 \leqq k \leqq n)$ が 1 になっているか，そうでないかで場合分けをして考える。

（ i ）k 番目が 1 であるとき

1 番目が k，k 番目が 1 なので，1 番目と k 番目の置換が起きており，

その 2 ヶ所以外の $n-2$ ヶ所に並ぶものは 2，3，…，$k-1$，$k+1$，…，n である。

これらの数字は何番目かという数字と同じものがそのまま残っているので，

$n-2$ 個のどれもが元の位置にならないようにする方法の総数なので $D(n-2)$ 通り。

（ii）k 番目が 1 でないとき

ある h 番目が 1 であるとすると

1 番目，	2 番目，	…，	h 番目，	…，	k 番目，	…，	n 番目
k，	□，	…，	1，	…，	○，	…，	△

というように並んでいる。

この場合，1 番目と k 番目以外の $n-2$ ヶ所の入るものと何番目かという数字は，すべては一致していないので並び替えの総数は $D(n-2)$ とはならない。

そこで，（k という数を含む）2 から n までの数を 2 番目から n 番目までの位置にどれもが元の位置にならないように並び替え，k という数があるところを 1 に置き換える。これで k 番目は 1 ではなく，1 から n までの数がどれもが元の位置にならないように並ぶことになる。k という数があるところを 1 に置き換える操作は 1 通りであるから，この並べ方の総数は $D(n-1)$ 通りある。

(∗)より（ⅰ)，（ⅱ)はそれぞれ $n-1$ 通りずつあるので

$$D(n)=(n-1)\{D(n-2)+D(n-1)\}$$

となる。