[東京工業大学 2004 年 前期 $\boxed{1}$]

☆―――☆

$a,\ b$を正の実数とする。

(1) 区間$a<x$における関数 $f(x)=\dfrac{x^4}{(x-a)^3}$ の増減を調べよ。

(2) $a<x$における関数 $g(x)=\dfrac{1}{(x-a)^2}-\dfrac{b}{x^3}$ のグラフと相異なる 3 点で交わるx軸に平行な直線が存在するための必要十分条件を求めよ。

☆―――☆

(1) $f(x)=\dfrac{x^4}{(x-a)^3}$ より $f'(x)=\dfrac{4x^3(x-a)^3-x^4\cdot 3(x-a)^2}{(x-a)^6}$

$$=\frac{x^3(x-4a)}{(x-a)^4}$$

よって $a<x\leqq 4a$ のとき減少， $x\geqq 4a$ のとき増加

(2) (1)の結果より，

$f(x)$ の増減表は右の通り。

x	a	$\cdots$	$4a$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\dfrac{256}{27}a$	$\nearrow$

$g(x)=\dfrac{1}{(x-a)^2}-\dfrac{b}{x^3}$ より $g'(x)=-\dfrac{2}{(x-a)^3}+\dfrac{3b}{x^4}$

$$=-\frac{2}{x^4}\left\{\frac{x^4}{(x-a)^3}-\frac{3b}{2}\right\}$$

$$=-\frac{2}{x^4}\left\{f(x)-\frac{3b}{2}\right\}$$ となる。

（$f(x)$の最小値）$=\dfrac{256}{27}a\geqq\dfrac{3b}{2}$ のとき， $g'(x)\leqq 0$ となるから，

このときは題意の直線は存在しない。

$\dfrac{256}{27}a<\dfrac{3b}{2}$ のとき， $g'(x)=0$ すなわち $f(x)=\dfrac{3b}{2}$ となるxが$a<x$の範囲に 2 つあり，

それらを α,β $(\alpha<\beta)$ とする。

このとき， $g(x)$の増減表は右の通り。

x	a	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$		$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$g(\beta)$	$\searrow$

また，$\lim_{x\to\infty} g(x)=0$, $\lim_{x\to a+0} g(x)=\infty$ である。

したがって，$y=g(x)$ と $y=k$ $(f(\alpha)<k<f(\beta))$ は相異なる 3 点で交わる。

よって，求める条件は $\frac{256}{27}a<\frac{3b}{2} \Leftrightarrow b>\frac{512}{81}a$

[注] $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$, $\lim_{x\to a+0} g(x)=\infty$ を確認しているのは,

$\lim_{x\to\infty} g(x)=0$ と増減表から $g(\beta)>0$ であることが保証され,

その上で $\lim_{x\to a+0} g(x)=\infty$ であることにより $g(\alpha)$ の正負に関わらず

$y=g(x)$ と $y=k$ とが相異なる 3 点で交わることになるから。

［ 東京工業大学 2004 年 前期 $\boxed{2}$ ］

(1) $f(x),\ g(x)$ を連続な偶関数，m を正の整数とするとき，

$$\int_0^{m\pi} f(\sin x)\,g(\cos x)\,dx = m\int_0^{\pi} f(\sin x)\,g(\cos x)\,dx$$ を証明せよ。

(2) 正の正数 $m,\ n$ が $m\pi \leqq n < (m+1)\pi$ を満たしているとき

$$\frac{m}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx \leqq \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx \leqq \frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx$$ を証明せよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx$ を求めよ。

---

(1) （与式の左辺）$\displaystyle = \int_0^{m\pi} f(\sin x)\,g(\cos x)\,dx$

$$= \sum_{k=1}^{m}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)\,g(\cos x)\,dx$$ であり

$u = x-(k-1)\pi$ とおくと $\sin x = \sin\{u+(k-1)\pi\} = (-1)^{k-1}\sin u$

$\cos x = \cos\{u+(k-1)\pi\} = (-1)^{k-1}\cos u$ となる。

$f(x),\ g(x)$ は偶関数であるから

$$f(\sin x) = f\left((-1)^{k-1}\sin u\right) = f(\sin u)$$

$$f(\cos x) = f\left((-1)^{k-1}\cos u\right) = f(\cos u)$$ となり，

$du = dx$， $x:(k-1)\pi \to k\pi$ のとき $u:0\to\pi$ なので

$$\sum_{k=1}^{m}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)\,g(\cos x)\,dx = \sum_{k=1}^{m}\int_0^{\pi} f(\sin u)\,g(\cos u)\,du$$

$$= m\int_0^{\pi} f(\sin u)\,g(\cos u)\,du$$

$$= m\int_0^{\pi} f(\sin x)\,g(\cos x)\,dx$$ よって題意は示された。

(2) $t = nx$ とおくと

$$\int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx = \int_0^n \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2}\cdot\frac{1}{n}dt$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^n \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2}dt$$ である。

ここで， $f(x) = |x|,\ g(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ とすれば

$f(x),\ g(x)$ は連続な偶関数であるので

$m\pi \leqq n < (m+1)\pi$ と $\dfrac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2} \geqq 0$ より

$$\frac{1}{n}\int_0^n \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2}dt \geqq \frac{1}{(m+1)\pi}\int_0^{m\pi} f(\sin t)g(\cos t)\,dt = \frac{m}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi} f(\sin t)g(\cos t)\,dt$$

さらに

$$\frac{1}{n}\int_0^n \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2}dt \leqq \frac{1}{m\pi}\int_0^{(m+1)\pi} f(\sin t)g(\cos t)\,dt = \frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi} f(\sin t)g(\cos t)\,dt$$

を得る。

したがって $\displaystyle \frac{m}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx \leqq \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx \leqq \frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx$

(3) $X=\cos x$ とおくと

$dX = -\sin x dx$, $x:0\to x$ のとき $X:1\to -1$ なので

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx = \int_1^{-1}\frac{-1}{(1+X^2)^2}dX = \int_{-1}^{1}\frac{1}{(1+X^2)^2}dX = 2\int_0^1\frac{1}{(1+X^2)^2}dX$$

さらに, $X=\tan\theta$ とおくと

$dX = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$, $X:0\to 1$ のとき $\theta:0\to\dfrac{\pi}{4}$ なので

$$2\int_0^1\frac{1}{(1+X^2)^2}dX = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

したがって(2)より $\displaystyle \frac{m}{(m+1)\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) \leqq \int_0^1\frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx \leqq \frac{m+1}{m\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$

すなわち $\displaystyle \frac{m}{m+1}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\right) \leqq \int_0^1\frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx \leqq \frac{m+1}{m\pi}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\right)$ を得る。

$n\to\infty$ のとき $m\to\infty$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx = \frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}$$

[東京工業大学 2004 年 前期 $\boxed{3}$]

☆ ☆

3 枚のコイン P, Q, R がある。P, Q, R の表の出る確率をそれぞれ p, q, r とする。このとき次の操作を n 回繰り返す。まず， P を投げて表が出れば Q を，裏が出れば R を選ぶ。次にその選んだコインを投げて，表が出れば赤玉を，裏が出れば白玉をつぼの中にいれる。

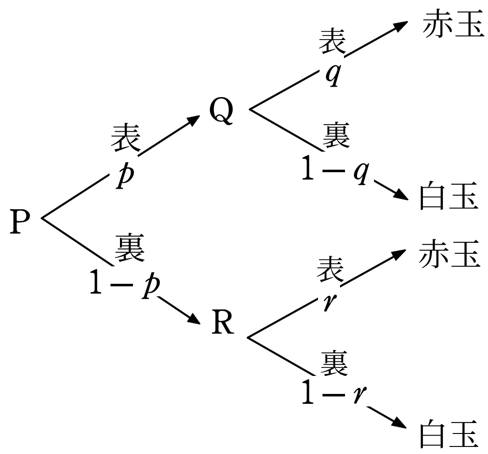
(1) n 回ともコイン Q を選び，つぼの中には k 個の赤玉が入っている確率を求めよ。

(2) つぼの中が赤玉だけとなる確率を求めよ。

(3) $n=2004,\ p=\dfrac{1}{2},\ q=\dfrac{1}{2},\ r=\dfrac{1}{5}$ のとき，つぼの中に何個の赤玉が入っていることがもっとも起こりやすいかを求めよ。

☆ ☆

(1) 赤玉，白玉の選ばれ方は図のようになる。



n 回ともコイン Q を選び，つぼの中に k 個の赤玉が入っているのは， n 回中

「P ：表 かつ Q ：表 」が k 回,

「P ：表 かつ Q ：裏 」が $n-k$ 回起こるとき

であるから，求める確率は

$${}_n\mathrm{C}_k\,(pq)^k\,\{p(1-q)\}^{n-k} = {}_n\mathrm{C}_k\,p^n q^k (1-q)^{n-k} \qquad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

(2) 赤玉が選ばれるのは,「P ：表 かつ Q ：表 」または「P ：裏 かつ R ：表 」のときである。

1 回の操作につき確率 $pq+(1-p)r$ で起こるので，これが n 回続くとき

求める確率は $\{pq+(1-p)r\}^n$

(3) $p=\dfrac{1}{2},\ q=\dfrac{1}{2},\ r=\dfrac{1}{5}$ のとき， $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{5}=\dfrac{7}{20}$ である。

よって，2004 回の操作で k 個の赤玉がつぼの中に入るとすると，その確率 P_k は

$$P_k = {}_{2004}\mathrm{C}_k\left(\frac{7}{20}\right)^k\left(1-\frac{7}{20}\right)^{2004-k} = \frac{2004!}{k!(2004-k)!}\left(\frac{7}{20}\right)^k\left(\frac{13}{20}\right)^{2004-k}$$

ここで，

$$\frac{P_{k+1}}{P_k}=\frac{\dfrac{2004!}{(k+1)!\{2004-(k+1)\}!}\left(\dfrac{7}{20}\right)^{k+1}\left(\dfrac{13}{20}\right)^{2004-(k+1)}}{\dfrac{2004!}{k!(2004-k)!}\left(\dfrac{7}{20}\right)^{k}\left(\dfrac{13}{20}\right)^{2004-k}}$$

$$=\frac{2004-k}{k+1}\cdot\frac{7}{13}$$

この式から，$P_1<P_2<\cdots<P_{700}<P_{701}>P_{702}>\cdots>P_{2003}>P_{2004}$ であることがわかるので

701 個の赤玉が入っていることが最も起こりやすい。

[注] (3)の P_k の最大を求めるところでは，次のように差をとって考えてもよい。

$P_{k+1}-P_k$

$$=\frac{2004!}{(k+1)!\{(2004-(k+1)\}!}\left(\frac{7}{20}\right)^{k+1}\left(\frac{13}{20}\right)^{2004-(k+1)}-\frac{2004!}{k!(2004-k)!}\left(\frac{7}{20}\right)^{k}\left(\frac{13}{20}\right)^{2004-k}$$

$$=\frac{2004!}{k!\{2004-(k+1)\}!}\left(\frac{7}{20}\right)^{k}\left(\frac{13}{20}\right)^{2004-(k+1)}\frac{1}{20^2}\cdot\left(\frac{7}{k+1}-\frac{13}{2004-k}\right)$$

ここで，式の後半部分について

$$\frac{7}{k+1}-\frac{13}{2004-k}=\frac{14015-20k}{(k+1)(2004-k)}$$

であるから，$k=700$ までは $P_{k+1}-P_k>0$，$k=701$ からは $P_{k+1}-P_k<0$ である。

よって，$P_1<P_2<\cdots<P_{700}<P_{701}>P_{702}>\cdots>P_{2003}>P_{2004}$ であることがわかるので

701 個の赤玉が入っていることが最も起こりやすい。

比 $\dfrac{P_{k+1}}{P_k}$ を調べて 1 と比較するか，差 $P_{k+1}-P_k$ を調べて 0 と比較するかの違いである。

ちなみに本問では，$2004\times\dfrac{7}{20}=701.4$ であるから答えの予想は容易である。

[東京工業大学 2004 年 前期 $\boxed{4}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$0<r<1$とする。空間において，点$(0, 0, 0)$を中心とする半径rの球と点$(1, 0, 0)$を中心とする半径$\sqrt{1-r^2}$の球との共通部分の体積を$V(r)$とする。次の問いに答えよ。

(1) $V(r)$を求めよ。

(2) rが $0<r<1$ の範囲を動くとき，$V(r)$を最大にするrの値および$V(r)$の最大値を求めよ。

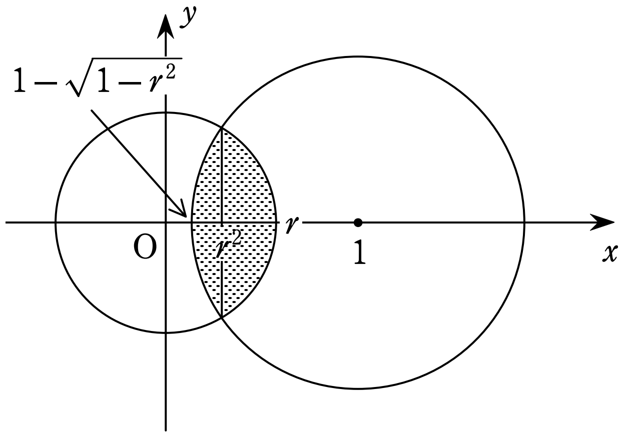
☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) 求める体積$V(r)$は $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leqq r^2 \\ (x-1)^2+y^2+z^2 \leqq 1-r^2 \end{cases}$ を満たす領域の体積に他ならない。

xy平面上での 2 つの球面の共有点を考えると $\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ (x-1)^2+y^2=1-r^2 \end{cases}$ として $x=r^2$ を得る。

2 円の位置関係は図のようになり，

求める体積は，図の打点部分をx軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積である。



よって

$$V(r)=\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{r^2}\pi\left\{1-r^2-(x-1)^2\right\}dx+\int_{r^2}^{r}\pi\left(r^2-x^2\right)dx$$

$$=\pi\left\{\left[(1-r^2)(x-1)-\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{1-\sqrt{1-r^2}}^{r^2}+\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{r^2}^{r}\right\}$$

$$=\pi\left\{\left\{(1-r^2)(r^2-1)-\frac{1}{3}(r^2-1)^3\right\}-\left\{(1-r^2)\left(-\sqrt{1-r^2}\right)-\frac{1}{3}\left(-\sqrt{1-r^2}\right)^3\right\}+\frac{2}{3}r^3-r^4+\frac{r^6}{3}\right\}$$

$$=\pi\left\{-(1-r^2)^2-\frac{1}{3}(r^2-1)^3+\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}r^3-r^4+\frac{r^6}{3}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{3}\left\{-3(1-r^2)^2-(r^2-1)^3+2\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}+2r^3-3r^4+r^6\right\}$$

$$=\frac{\pi}{3}\left\{-3r^4+6r^2-3-r^6+3r^4-3r^2+1+2\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}+2r^3-3r^4+r^6\right\}$$

$$=\frac{\pi}{3}\left\{-3r^4+2r^3+3r^2-2+2\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

(2) $V(r)=\frac{\pi}{3}\left\{-3r^4+2r^3+3r^2-2+2\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$ であり

$f(r)=-3r^4+2r^3+3r^2-2+2\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}$ とおく。

$$f'(r)=-12r^3+6r^2+6r+3\left(1-r^2\right)^{\frac{1}{2}}(-2r)$$

$$=-6r\left(2r^2-r-1+\sqrt{1-r^2}\right)$$

$$=-6r\left\{(2r+1)(r-1)+\sqrt{1-r^2}\right\}$$

$$=-6r\frac{(2r+1)(r-1)+\sqrt{1-r^2}}{1}\cdot\frac{-(2r+1)(r-1)+\sqrt{1-r^2}}{-(2r+1)(r-1)+\sqrt{1-r^2}}$$

$$=-6r\frac{-(2r+1)^2(r-1)^2+(1-r^2)}{(2r+1)(1-r)+\sqrt{1-r^2}}$$

$$=-6r\frac{(1-r)\{-(2r+1)^2(1-r)+(1+r)\}}{(2r+1)(1-r)+\sqrt{1-r^2}}$$

$$=-6r\frac{(1-r)\left(-4r^2-4r-1+4r^3+4r^2+r+1+r\right)}{(2r+1)(1-r)+\sqrt{1-r^2}}$$

$$=-6r\frac{(1-r)\left(4r^3-2r\right)}{(2r+1)(1-r)+\sqrt{1-r^2}}$$

$$=-12r^2\frac{(1-r)\left(2r^2-1\right)}{(2r+1)(1-r)+\sqrt{1-r^2}}$$

$$=\frac{12r^2(1-r)\left(1+\sqrt{2}r\right)\left(1-\sqrt{2}r\right)}{(2r+1)(1-r)+\sqrt{1-r^2}}$$ であるから

$f'(r)\left(=V'(r)\right)=0$ となるのは $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であり，$V(r)$ の増減は下表に従う。

r	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$V'(r)$	／	＋	0	−	／
$V(r)$	／	↗	最大	↘	／

よって，$V(r)$ は $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときに最大となり，最大値は

$$V\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{3}\left\{-3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3+3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-2+2\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{3}\left\{-\frac{3}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}-2+2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{3}\left(-\frac{5}{4}+\sqrt{2}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{5}{12}\right)\pi$$

[注]

(1)の積分計算において $\int(1-r^2)\,dx=(1-r^2)x$ とせずに $\int(1-r^2)\,dx=(1-r^2)(x-1)$ として

その後の代入計算を楽にしている。