[ 東京工業大学 2004 年 前期 $\boxed{1}$ ]

☆――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$a,\ b$ を正の実数とする。

(1) 区間 $a < x$ における関数 $f(x) = \dfrac{x^4}{(x-a)^3}$ の増減を調べよ。

(2) $a < x$ における関数 $g(x) = \dfrac{1}{(x-a)^2} - \dfrac{b}{x^3}$ のグラフと相異なる 3 点で交わる $x$ 軸に平行な直線が存在するための必要十分条件を求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――――☆

[ 東京工業大学 2004 年 前期 $\boxed{2}$ ]

(1) $f(x),\ g(x)$ を連続な偶関数，$m$ を正の整数とするとき，

$$\int_0^{m\pi} f(\sin x)\,g(\cos x)\,dx = m\int_0^{\pi} f(\sin x)\,g(\cos x)\,dx$$ を証明せよ。

(2) 正の正数 $m,\ n$ が $m\pi \leqq n < (m+1)\pi$ を満たしているとき

$$\frac{m}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}\,dx \leqq \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}\,dx \leqq \frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}\,dx$$ を証明せよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}\,dx$ を求めよ。

[ 東京工業大学 2004 年 前期 $\boxed{3}$ ]

3 枚のコイン P, Q, R がある。P, Q, R の表の出る確率をそれぞれ $p, q, r$ とする。このとき次の操作を $n$ 回繰り返す。まず，P を投げて表が出れば Q を，裏が出れば R を選ぶ。次にその選んだコインを投げて，表が出れば赤玉を，裏が出れば白玉をつぼの中にいれる。

(1) $n$ 回ともコイン Q を選び，つぼの中には $k$ 個の赤玉が入っている確率を求めよ。

(2) つぼの中が赤玉だけとなる確率を求めよ。

(3) $n=2004,\ p=\dfrac{1}{2},\ q=\dfrac{1}{2},\ r=\dfrac{1}{5}$ のとき，つぼの中に何個の赤玉が入っていることがもっとも起こりやすいかを求めよ。

[ 東京工業大学 2004 年 前期 $\boxed{4}$ ]

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$0<r<1$とする。空間において，点$(0,\ 0,\ 0)$を中心とする半径$r$の球と点$(1,\ 0,\ 0)$を中心とする半径$\sqrt{1-r^2}$の球との共通部分の体積を$V(r)$とする。次の問いに答えよ。

(1) $V(r)$を求めよ。

(2) $r$が $0<r<1$ の範囲を動くとき，$V(r)$を最大にする$r$の値および$V(r)$の最大値を求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆