[東京工業大学 2004 年 前期 $\boxed{4}$]

☆────────────────────────────────────☆

$0<r<1$とする。空間において，点$(0, 0, 0)$を中心とする半径rの球と点$(1, 0, 0)$を中心とする半径$\sqrt{1-r^2}$の球との共通部分の体積を$V(r)$とする。次の問いに答えよ。

(1) $V(r)$を求めよ。

(2) rが $0<r<1$ の範囲を動くとき，$V(r)$を最大にするrの値および$V(r)$の最大値を求めよ。

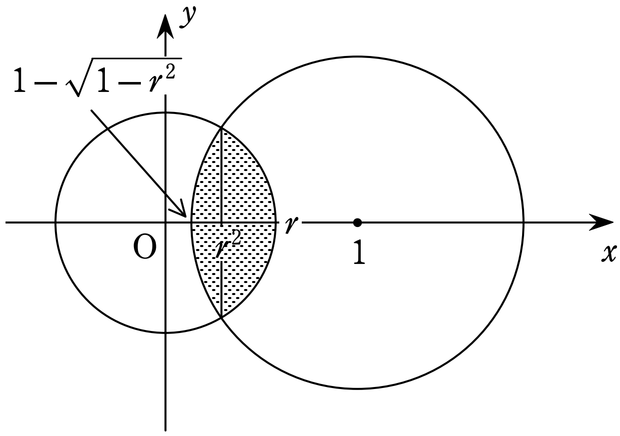
☆────────────────────────────────────☆

(1) 求める体積$V(r)$は $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leqq r^2 \\ (x-1)^2+y^2+z^2 \leqq 1-r^2 \end{cases}$ を満たす領域の体積に他ならない。

xy平面上での 2 つの球面の共有点を考えると $\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ (x-1)^2+y^2=1-r^2 \end{cases}$ として $x=r^2$ を得る。

2 円の位置関係は図のようになり，

求める体積は，図の打点部分をx軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積である。



よって

$$V(r)=\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{r^2}\pi\left\{1-r^2-(x-1)^2\right\}dx+\int_{r^2}^{r}\pi\left(r^2-x^2\right)dx$$

$$=\pi\left\{\left[(1-r^2)(x-1)-\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{1-\sqrt{1-r^2}}^{r^2}+\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{r^2}^{r}\right\}$$

$$=\pi\left\{\left\{(1-r^2)(r^2-1)-\frac{1}{3}(r^2-1)^3\right\}-\left\{(1-r^2)\left(-\sqrt{1-r^2}\right)-\frac{1}{3}\left(-\sqrt{1-r^2}\right)^3\right\}+\frac{2}{3}r^3-r^4+\frac{r^6}{3}\right\}$$

$$=\pi\left\{-(1-r^2)^2-\frac{1}{3}(r^2-1)^3+\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}r^3-r^4+\frac{r^6}{3}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{3}\left\{-3(1-r^2)^2-(r^2-1)^3+2\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}+2r^3-3r^4+r^6\right\}$$

$$=\frac{\pi}{3}\left\{-3r^4+6r^2-3-r^6+3r^4-3r^2+1+2\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}+2r^3-3r^4+r^6\right\}$$

$$=\frac{\pi}{3}\left\{-3r^4+2r^3+3r^2-2+2\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

(2) $V(r)=\frac{\pi}{3}\left\{-3r^4+2r^3+3r^2-2+2\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$ であり

$f(r)=-3r^4+2r^3+3r^2-2+2\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}$ とおく。

$$f'(r)=-12r^3+6r^2+6r+3\left(1-r^2\right)^{\frac{1}{2}}(-2r)$$

$$=-6r\left(2r^2-r-1+\sqrt{1-r^2}\right)$$

$$=-6r\left\{(2r+1)(r-1)+\sqrt{1-r^2}\right\}$$

$$=-6r\frac{(2r+1)(r-1)+\sqrt{1-r^2}}{1}\cdot\frac{-(2r+1)(r-1)+\sqrt{1-r^2}}{-(2r+1)(r-1)+\sqrt{1-r^2}}$$

$$=-6r\frac{-(2r+1)^2(r-1)^2+(1-r^2)}{(2r+1)(1-r)+\sqrt{1-r^2}}$$

$$=-6r\frac{(1-r)\{-(2r+1)^2(1-r)+(1+r)\}}{(2r+1)(1-r)+\sqrt{1-r^2}}$$

$$=-6r\frac{(1-r)\left(-4r^2-4r-1+4r^3+4r^2+r+1+r\right)}{(2r+1)(1-r)+\sqrt{1-r^2}}$$

$$=-6r\frac{(1-r)\left(4r^3-2r\right)}{(2r+1)(1-r)+\sqrt{1-r^2}}$$

$$=-12r^2\frac{(1-r)\left(2r^2-1\right)}{(2r+1)(1-r)+\sqrt{1-r^2}}$$

$$=\frac{12r^2(1-r)\left(1+\sqrt{2}r\right)\left(1-\sqrt{2}r\right)}{(2r+1)(1-r)+\sqrt{1-r^2}}$$ であるから

$f'(r)\left(=V'(r)\right)=0$ となるのは $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であり，$V(r)$ の増減は下表に従う。

r	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$V'(r)$	╱	＋	0	－	╱
$V(r)$	╱	↗	最大	↘	╱

よって，$V(r)$ は $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときに最大となり，最大値は

$$V\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{3}\left\{-3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3+3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-2+2\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{3}\left\{-\frac{3}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}-2+2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{3}\left(-\frac{5}{4}+\sqrt{2}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{5}{12}\right)\pi$$

[注]

(1)の積分計算において $\int(1-r^2)\,dx=(1-r^2)x$ とせずに $\int(1-r^2)\,dx=(1-r^2)(x-1)$ として

その後の代入計算を楽にしている。