[東京工業大学 2004 年 前期 $\boxed{3}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――☆

3 枚のコイン P, Q, R がある。P, Q, R の表の出る確率をそれぞれ p, q, r とする。このとき次の操作を n 回繰り返す。まず，P を投げて表が出れば Q を，裏が出れば R を選ぶ。次にその選んだコインを投げて，表が出れば赤玉を，裏が出れば白玉をつぼの中にいれる。

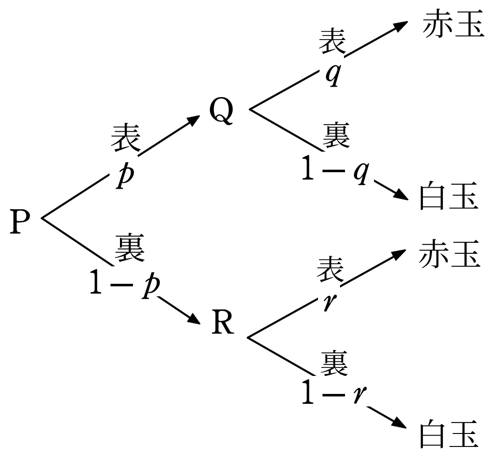
(1) n 回ともコイン Q を選び，つぼの中には k 個の赤玉が入っている確率を求めよ。

(2) つぼの中が赤玉だけとなる確率を求めよ。

(3) $n=2004,\ p=\dfrac{1}{2},\ q=\dfrac{1}{2},\ r=\dfrac{1}{5}$ のとき，つぼの中に何個の赤玉が入っていることがもっとも起こりやすいかを求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) 赤玉，白玉の選ばれ方は図のようになる。



n 回ともコイン Q を選び，つぼの中に k 個の赤玉が入っているのは，n 回中

「P：表 かつ Q：表」が k 回，

「P：表 かつ Q：裏」が $n-k$ 回起こるとき

であるから，求める確率は

$${}_n\mathrm{C}_k\,(pq)^k\,\{p(1-q)\}^{n-k} = {}_n\mathrm{C}_k\,p^n q^k (1-q)^{n-k} \qquad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

(2) 赤玉が選ばれるのは，「P：表 かつ Q：表」または「P：裏 かつ R：表」のときである。

1 回の操作につき確率 $pq+(1-p)r$ で起こるので，これが n 回続くとき

求める確率は $\{pq+(1-p)r\}^n$

(3) $p=\dfrac{1}{2},\ q=\dfrac{1}{2},\ r=\dfrac{1}{5}$ のとき，$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{5}=\dfrac{7}{20}$ である。

よって，2004 回の操作で k 個の赤玉がつぼの中に入るとすると，その確率 P_k は

$$P_k = {}_{2004}\mathrm{C}_k\left(\frac{7}{20}\right)^k\left(1-\frac{7}{20}\right)^{2004-k} = \frac{2004!}{k!(2004-k)!}\left(\frac{7}{20}\right)^k\left(\frac{13}{20}\right)^{2004-k}$$

ここで，

$$\frac{P_{k+1}}{P_k}=\frac{\dfrac{2004!}{(k+1)!\{2004-(k+1)\}!}\left(\dfrac{7}{20}\right)^{k+1}\left(\dfrac{13}{20}\right)^{2004-(k+1)}}{\dfrac{2004!}{k!(2004-k)!}\left(\dfrac{7}{20}\right)^{k}\left(\dfrac{13}{20}\right)^{2004-k}}$$

$$=\frac{2004-k}{k+1}\cdot\frac{7}{13}$$

この式から，$P_1<P_2<\cdots<P_{700}<P_{701}>P_{702}>\cdots>P_{2003}>P_{2004}$ であることがわかるので

701 個の赤玉が入っていることが最も起こりやすい。

[注] (3)の P_k の最大を求めるところでは，次のように差をとって考えてもよい。

$$P_{k+1}-P_k$$

$$=\frac{2004!}{(k+1)!\{(2004-(k+1)\}!}\left(\frac{7}{20}\right)^{k+1}\left(\frac{13}{20}\right)^{2004-(k+1)}-\frac{2004!}{k!(2004-k)!}\left(\frac{7}{20}\right)^{k}\left(\frac{13}{20}\right)^{2004-k}$$

$$=\frac{2004!}{k!\{2004-(k+1)\}!}\left(\frac{7}{20}\right)^{k}\left(\frac{13}{20}\right)^{2004-(k+1)}\frac{1}{20^2}\cdot\left(\frac{7}{k+1}-\frac{13}{2004-k}\right)$$

ここで，式の後半部分について

$$\frac{7}{k+1}-\frac{13}{2004-k}=\frac{14015-20k}{(k+1)(2004-k)}$$

であるから，$k=700$ までは $P_{k+1}-P_k>0$，$k=701$ からは $P_{k+1}-P_k<0$ である。

よって，$P_1<P_2<\cdots<P_{700}<P_{701}>P_{702}>\cdots>P_{2003}>P_{2004}$ であることがわかるので

701 個の赤玉が入っていることが最も起こりやすい。

比 $\dfrac{P_{k+1}}{P_k}$ を調べて 1 と比較するか，差 $P_{k+1}-P_k$ を調べて 0 と比較するかの違いである。

ちなみに本問では，$2004\times\dfrac{7}{20}=701.4$ であるから答えの予想は容易である。