[東京工業大学 2004 年 前期 $\boxed{2}$]

(1) $f(x),\ g(x)$ を連続な偶関数, m を正の整数とするとき,

$$\int_0^{m\pi} f(\sin x)\,g(\cos x)\,dx = m\int_0^{\pi} f(\sin x)\,g(\cos x)\,dx$$ を証明せよ。

(2) 正の正数 $m,\ n$ が $m\pi \leqq n < (m+1)\pi$ を満たしているとき

$$\frac{m}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx \leqq \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx \leqq \frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx$$ を証明せよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx$ を求めよ。

---

(1) (与式の左辺) $= \displaystyle\int_0^{m\pi} f(\sin x)\,g(\cos x)\,dx$

$$= \sum_{k=1}^{m}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)\,g(\cos x)\,dx$$ であり

$u = x-(k-1)\pi$ とおくと $\sin x = \sin\{u+(k-1)\pi\} = (-1)^{k-1}\sin u$

$\cos x = \cos\{u+(k-1)\pi\} = (-1)^{k-1}\cos u$ となる。

$f(x),\ g(x)$ は偶関数であるから

$$f(\sin x) = f\left((-1)^{k-1}\sin u\right) = f(\sin u)$$

$$f(\cos x) = f\left((-1)^{k-1}\cos u\right) = f(\cos u)$$ となり,

$du = dx$, $x : (k-1)\pi \to k\pi$ のとき $u : 0 \to \pi$ なので

$$\sum_{k=1}^{m}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)\,g(\cos x)\,dx = \sum_{k=1}^{m}\int_0^{\pi} f(\sin u)\,g(\cos u)\,du$$

$$= m\int_0^{\pi} f(\sin u)\,g(\cos u)\,du$$

$$= m\int_0^{\pi} f(\sin x)\,g(\cos x)\,dx$$ よって題意は示された。

(2) $t = nx$ とおくと

$$\int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx = \int_0^n \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2}\cdot\frac{1}{n}\,dt$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^n \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2}dt$$ である。

ここで, $f(x) = |x|,\ g(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ とすれば

$f(x),\ g(x)$ は連続な偶関数であるので

$m\pi \leqq n < (m+1)\pi$ と $\dfrac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2} \geqq 0$ より

$$\frac{1}{n}\int_0^n \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2}dt \geqq \frac{1}{(m+1)\pi}\int_0^{m\pi} f(\sin t)g(\cos t)\,dt = \frac{m}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi} f(\sin t)g(\cos t)\,dt$$

さらに

$$\frac{1}{n}\int_0^n \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2}dt \leqq \frac{1}{m\pi}\int_0^{(m+1)\pi} f(\sin t)g(\cos t)\,dt = \frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi} f(\sin t)g(\cos t)\,dt$$

を得る。

したがって $\dfrac{m}{(m+1)\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx \leqq \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx \leqq \frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx$

(3) $X=\cos x$ とおくと

$dX = -\sin x dx$， $x:0\to x$ のとき $X:1\to -1$ なので

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx = \int_1^{-1}\frac{-1}{(1+X^2)^2}dX = \int_{-1}^{1}\frac{1}{(1+X^2)^2}dX = 2\int_0^1\frac{1}{(1+X^2)^2}dX$$

さらに， $X=\tan\theta$ とおくと

$dX = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$， $X:0\to 1$ のとき $\theta:0\to\dfrac{\pi}{4}$ なので

$$2\int_0^1\frac{1}{(1+X^2)^2}dX = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

したがって(2)より $\dfrac{m}{(m+1)\pi}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\right) \leqq \displaystyle\int_0^1\frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx \leqq \frac{m+1}{m\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$

すなわち $\dfrac{m}{m+1}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2\pi}\right) \leqq \displaystyle\int_0^1\frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx \leqq \frac{m+1}{m\pi}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\right)$ を得る。

$n\to\infty$ のとき $m\to\infty$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx = \frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}$$