[東京工業大学 2004 年 前期 $\boxed{2}$]

(1) $f(x),\ g(x)$ を連続な偶関数，m を正の整数とするとき，

$$\int_0^{m\pi} f(\sin x)\,g(\cos x)\,dx = m\int_0^{\pi} f(\sin x)\,g(\cos x)\,dx$$ を証明せよ。

(2) 正の正数 $m,\ n$ が $m\pi \leqq n < (m+1)\pi$ を満たしているとき

$$\frac{m}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}\,dx \leqq \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}\,dx \leqq \frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}\,dx$$ を証明せよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}\,dx$ を求めよ。