[東京工業大学 2004 年 前期 $\boxed{1}$]

a, b を正の実数とする。

(1) 区間 $a < x$ における関数 $f(x)=\dfrac{x^4}{(x-a)^3}$ の増減を調べよ。

(2) $a < x$ における関数 $g(x)=\dfrac{1}{(x-a)^2}-\dfrac{b}{x^3}$ のグラフと相異なる 3 点で交わる x 軸に平行な直線が存在するための必要十分条件を求めよ。

---

(1) $f(x)=\dfrac{x^4}{(x-a)^3}$ より $f'(x)=\dfrac{4x^3(x-a)^3-x^4\cdot 3(x-a)^2}{(x-a)^6}$

$$=\frac{x^3(x-4a)}{(x-a)^4}$$

よって $a < x \leqq 4a$ のとき減少, $x \leqq 4a$ のとき増加

(2) (1)の結果より,

$f(x)$ の増減表は右の通り。

x	a	$\cdots$	$4a$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\dfrac{256}{27}a$	$\nearrow$

$g(x)=\dfrac{1}{(x-a)^2}-\dfrac{b}{x^3}$ より $g'(x)=-\dfrac{2}{(x-a)^3}+\dfrac{3b}{x^4}$

$$=-\frac{2}{x^4}\left\{\frac{x^4}{(x-a)^3}-\frac{3b}{2}\right\}$$

$$=-\frac{2}{x^4}\left\{f(x)-\frac{3b}{2}\right\} \text{ となる。}$$

（$f(x)$ の最小値）$=\dfrac{256}{27}a \geqq \dfrac{3b}{2}$ のとき, $g'(x) \leqq 0$ となるから,

このときは題意の直線は存在しない。

$\dfrac{256}{27}a < \dfrac{3b}{2}$ のとき, $g'(x)=0$ すなわち $f(x)=\dfrac{3b}{2}$ となる x が $a < x$ の範囲に 2 つあり,

それらを α, β $(\alpha < \beta)$ とする。

このとき, $g(x)$ の増減表は右の通り。

x	a	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$		$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$g(\beta)$	$\searrow$

また，$\lim_{x\to\infty} g(x)=0,\ \lim_{x\to a+0} g(x)=\infty$ である。

したがって，$y=g(x)$ と $y=k\ \ (f(\alpha)<k<f(\beta))$ は相異なる 3 点で交わる。

よって，求める条件は $\frac{256}{27}a<\frac{3b}{2} \Leftrightarrow b>\frac{512}{81}a$

[注] $\lim_{x\to\infty} g(x)=0,\ \lim_{x\to a+0} g(x)=\infty$ を確認しているのは,

$\lim_{x\to\infty} g(x)=0$ と増減表から $g(\beta)>0$ であることが保証され,

その上で $\lim_{x\to a+0} g(x)=\infty$ であることにより $g(\alpha)$ の正負に関わらず

$y=g(x)$ と $y=k$ とが相異なる 3 点で交わることになるから。