[東京工業大学 2003 年後期 $\boxed{1}$]

xyz 空間の 2 点 P, Q を△OPQ（O は原点）の面積が正の一定値 S となるように動かす。P, Q から xy 平面に引いた垂線をそれぞれ PP′，QQ′ とし，△OP′Q′ の面積を S_1 とする。ただし，O, P′, Q′ が同一直線上にあるときは $S_1=0$ とする。同様に P, Q から yz 平面，zx 平面に垂線を引いて作った三角形の面積を S_2, S_3 とする。

(1) $S^2=S_1{}^2+S_2{}^2+S_3{}^2$ を証明せよ。

(2) $S_1+S_2+S_3$ の最大値，最小値を求めよ。

---

(1) 平面 OPQ の単位法線ベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とする。すなわち，$a^2+b^2+c^2=1$ である。

また，平面 OPQ と xy 平面とのなす角を θ_z $\left(0\leqq\theta_z\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とし，$\overrightarrow{e_z}=(0,\ 0,\ 1)$ とすると

$\cos\theta_z=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{e_z}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{e_z}|}=|c|$ より $S_1=S\cos\theta_z=S|c|$ となる。

同様にして $S_2=S|a|$，$S_3=S|b|$ を得る。

このとき，$S_1{}^2+S_2{}^2+S_3{}^2=\left(S|c|\right)^2+\left(S|a|\right)^2+\left(S|b|\right)^2=(a^2+b^2+c^2)S^2=S^2$

よって題意は示された。

(2) コーシー・シュワルツの不等式 $(ax+by+cz)^2\leqq(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$ …① において

$a=b=c=1,\ x=S_1,\ y=S_2,\ z=S_3$ とすると

$(S_1+S_2+S_3)^2\leqq3\left(S_1{}^2+S_2{}^2+S_3{}^2\right)=3S^2$

$S_1+S_2+S_3>0,\ S>0$ より $S_1+S_2+S_3\leqq\sqrt{3}S$

等号成立は $S_1=S_2=S_3$ のとき。

また，①において $a=1,\ b=c=0,\ x=\sqrt{S_1},\ y=\sqrt{S_2},\ z=\sqrt{S_3}$ とすると

$S_1\leqq S_1+S_2+S_3$ 等号成立は $S_2=S_3=0$ のときで，このとき $S_1=S$ である。

したがって，$S_1+S_2+S_3$ の最大値は $\sqrt{3}S$，最小値は S

[東京工業大学 2003 年後期 $\boxed{2}$]

m を 0 以上の整数とする。直線 $2x+3y=m$ 上の点 $(x,\ y)$ で，$x,\ y$ がともに 0 以上の整数であるものの個数を $N(m)$ とする。

⑴ $N(m+6)=N(m)+1$ を証明せよ。

⑵ $N(m)=1-m+\left[\dfrac{m}{2}\right]+\left[\dfrac{2m}{3}\right]$ を証明せよ。ただし，$[a]$ は a 以下の最大の整数を表すものとする。

⑴ $2x+3y=m$ …①，$2x+3y=m+6$ …② とする。

② $\Leftrightarrow$ $2x+3(y-2)=m$ であり，①を満たす非負の整数解が $N(m)$ 個あるので

$\begin{cases} x \geqq 0 \\ y-2 \geqq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 2 \end{cases}$ を満たす②の非負整数解も $N(m)$ 個ある。

ここで，$y=0$ のとき②より $2x=m+6$ …③

$y=1$ のとき②より $2x=m+3$ …④

となるが，m が偶数ならば③より 非負整数解が 1 つ得られ，

m が奇数ならば④より 非負整数解が 1 つ得られる。

よって，m の偶奇がいずれでも非負の整数解がここに 1 つあるので $N(m+6)=N(m)+1$

⑵ $N(m)=1-m+\left[\dfrac{m}{2}\right]+\left[\dfrac{2m}{3}\right]$ …（＊）

$x,\ y$ を非負の整数として

$2x+3y=0$ となるのは $(x,\ y)=(0,\ 0)$

$2x+3y=1$ となる $x,\ y$ は存在しない

$2x+3y=2$ となるのは $(x,\ y)=(1,\ 0)$

$2x+3y=3$ となるのは $(x,\ y)=(0,\ 1)$

$2x+3y=4$ となるのは $(x,\ y)=(2,\ 0)$

$2x+3y=5$ となるのは $(x,\ y)=(1,\ 1)$

であるから $N(0)=N(2)=N(3)=N(4)=N(5)=1$，$N(1)=0$ である。

よって，$m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ のとき（＊）は成り立っている。

ここで，m を0以上の整数とすると

$$1-(m+6)+\left[\frac{(m+6)}{2}\right]+\left[\frac{2(m+6)}{3}\right]=1-m-6+\left[\frac{m}{2}+3\right]+\left[\frac{2m}{3}+4\right]$$

$$=1-m-6+\left[\frac{m}{2}\right]+3+\left[\frac{2m}{3}\right]+4$$

$$=1-m+\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{2m}{3}\right]+1$$

$$=N(m)+1$$

となるので，数学的帰納法によりすべての非負整数 m に対して

$N(m)=1-m+\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{2m}{3}\right]$ が成り立つ。