

[東京工業大学 2003 年後期 1]



xyz 空間の 2 点 P, Q を $\triangle OPQ$ (O は原点) の面積が正の一定値 S となるように動かす。 P, Q から xy 平面に引いた垂線をそれぞれ PP', QQ' とし, $\triangle OP'Q'$ の面積を S_1 とする。ただし, O, P', Q' が同一直線上にあるときは $S_1 = 0$ とする。同様に P, Q から yz 平面, zx 平面に垂線を引いて作った三角形の面積を S_2, S_3 とする。

(1) $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ を証明せよ。

(2) $S_1 + S_2 + S_3$ の最大値, 最小値を求めよ。



[東京工業大学 2003 年後期 2]



m を 0 以上の整数とする。直線 $2x+3y=m$ 上の点 (x, y) で, x, y がともに 0 以上の整数であるものの個数を $N(m)$ とする。

(1) $N(m+6) = N(m)+1$ を証明せよ。

(2) $N(m) = 1 - m + \left[\frac{m}{2} \right] + \left[\frac{2m}{3} \right]$ を証明せよ。ただし, $[a]$ は a 以下の最大の整数を表すものとする。

