[東京工業大学 2003 年後期 $\boxed{2}$]

m を 0 以上の整数とする。直線 $2x+3y=m$ 上の点 $(x,\ y)$ で，$x,\ y$ がともに 0 以上の整数であるものの個数を $N(m)$ とする。

(1) $N(m+6)=N(m)+1$ を証明せよ。

(2) $N(m)=1-m+\left[\dfrac{m}{2}\right]+\left[\dfrac{2m}{3}\right]$ を証明せよ。ただし，$[a]$ は a 以下の最大の整数を表すものとする。

---

(1) $2x+3y=m$ …①，$2x+3y=m+6$ …② とする。

② $\Leftrightarrow$ $2x+3(y-2)=m$ であり，①を満たす非負の整数解が $N(m)$ 個あるので

$\begin{cases} x \geqq 0 \\ y-2 \geqq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 2 \end{cases}$ を満たす②の非負整数解も $N(m)$ 個ある。

ここで，$y=0$ のとき②より $2x=m+6$ …③

$y=1$ のとき②より $2x=m+3$ …④

となるが，m が偶数ならば③より 非負整数解が 1 つ得られ，

m が奇数ならば④より 非負整数解が 1 つ得られる。

よって，m の偶奇がいずれでも非負の整数解がここに 1 つあるので $N(m+6)=N(m)+1$

(2) $N(m)=1-m+\left[\dfrac{m}{2}\right]+\left[\dfrac{2m}{3}\right]$ …（＊）

$x,\ y$ を非負の整数として

$2x+3y=0$ となるのは $(x,\ y)=(0,\ 0)$

$2x+3y=1$ となる $x,\ y$ は存在しない

$2x+3y=2$ となるのは $(x,\ y)=(1,\ 0)$

$2x+3y=3$ となるのは $(x,\ y)=(0,\ 1)$

$2x+3y=4$ となるのは $(x,\ y)=(2,\ 0)$

$2x+3y=5$ となるのは $(x,\ y)=(1,\ 1)$

であるから $N(0)=N(2)=N(3)=N(4)=N(5)=1$，$N(1)=0$ である。

よって，$m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ のとき（＊）は成り立っている。

ここで，m を0以上の整数とすると

$$
\begin{aligned}
1-(m+6)+\left[\frac{(m+6)}{2}\right]+\left[\frac{2(m+6)}{3}\right] &= 1-m-6+\left[\frac{m}{2}+3\right]+\left[\frac{2m}{3}+4\right] \\
&= 1-m-6+\left[\frac{m}{2}\right]+3+\left[\frac{2m}{3}\right]+4 \\
&= 1-m+\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{2m}{3}\right]+1 \\
&= N(m)+1
\end{aligned}
$$

となるので，数学的帰納法によりすべての非負整数 m に対して

$N(m)=1-m+\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{2m}{3}\right]$ が成り立つ。