[東京工業大学 2003 年後期 $\boxed{1}$]

☆ ☆

xyz 空間の 2 点 P, Q を△OPQ（O は原点）の面積が正の一定値 S となるように動かす。P, Q から xy 平面に引いた垂線をそれぞれ PP′，QQ′ とし，△OP′Q′ の面積を S_1 とする。ただし，O, P′, Q′ が同一直線上にあるときは $S_1 = 0$ とする。同様に P, Q から yz 平面，zx 平面に垂線を引いて作った三角形の面積を S_2, S_3 とする。

(1) $S^2 = S_1{}^2 + S_2{}^2 + S_3{}^2$ を証明せよ。

(2) $S_1 + S_2 + S_3$ の最大値，最小値を求めよ。

☆ ☆

(1) 平面OPQの単位法線ベクトルを $\vec{n} = (a, b, c)$ とする。すなわち，$a^2 + b^2 + c^2 = 1$ である。

また，平面OPQと xy 平面とのなす角を θ_z $\left(0 \leqq \theta_z \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とし，$\vec{e_z} = (0, 0, 1)$ とすると

$\cos\theta_z = \dfrac{|\vec{n} \cdot \vec{e_z}|}{|\vec{n}||\vec{e_z}|} = |c|$ より $S_1 = S\cos\theta_z = S|c|$ となる。

同様にして $S_2 = S|a|$，$S_3 = S|b|$ を得る。

このとき，$S_1{}^2 + S_2{}^2 + S_3{}^2 = \left(S|c|\right)^2 + \left(S|a|\right)^2 + \left(S|b|\right)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)S^2 = S^2$

よって題意は示された。

(2) コーシー・シュワルツの不等式 $(ax + by + cz)^2 \leqq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$ …① において

$a = b = c = 1,\ x = S_1,\ y = S_2,\ z = S_3$ とすると

$(S_1 + S_2 + S_3)^2 \leqq 3\left(S_1{}^2 + S_2{}^2 + S_3{}^2\right) = 3S^2$

$S_1 + S_2 + S_3 > 0,\ S > 0$ より $S_1 + S_2 + S_3 \leqq \sqrt{3}S$

等号成立は $S_1 = S_2 = S_3$ のとき。

また，①において $a = 1,\ b = c = 0,\ x = \sqrt{S_1},\ y = \sqrt{S_2},\ z = \sqrt{S_3}$ とすると

$S_1 \leqq S_1 + S_2 + S_3$ 等号成立は $S_2 = S_3 = 0$ のときで，このとき $S_1 = S$ である。

したがって，$S_1 + S_2 + S_3$ の最大値は $\sqrt{3}S$，最小値は S