[東京工業大学 2003 年 前期 $\boxed{1}$]

(1) 3 次関数 $y=-x^3+ax^2+bx\ \ (a>0)$ のグラフを C とする。原点を通る直線で，C とちょうど 2 点を共有するものを 2 本求めよ。

(2) (1)で求めた直線のうち，傾きの大きい方を ℓ_1，小さい方を ℓ_2 とする。C と ℓ_1 が囲む部分の面積を S_1，C と ℓ_2 が囲む部分の面積を S_2 とおく。この二つの面積の比 $S_1:S_2$ を求めよ。

---

(1) 3 次関数のグラフと直線の共有点の個数は 1，2，3 個のいずれかである。

2 個となるのは，直線が 3 次関数のグラフの接線になるときである。

$f(x)=-x^3+ax^2+bx$ とおくと $f'(x)=-3x^2+2ax+b$ であり

$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

$$y-(-t^3+at^2+bt)=(-3t^2+2at+b)(x-t)\quad \cdots①$$

これが原点を通るとき

$$0-(-t^3+at^2+bt)=(-3t^2+2at+b)(0-t)$$ より

$$2t^3-at^2=0 \iff t^2(2t-a)=0$$ から $t=0,\ \dfrac{a}{2}$

これを①に代入して，求める直線は $y=bx,\ y=\left(\dfrac{1}{4}a^2+b\right)x$

(2) $\dfrac{1}{4}a^2+b>b$ であるから

$\ell_1: y=\left(\dfrac{1}{4}a^2+b\right)x$，$\ell_2: y=bx$ である。

したがって $S_1=\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}}\left\{\left(\frac{1}{4}a^2+b\right)x-(-x^3+ax^2+bx)\right\}dx$

$$=\int_0^{\frac{a}{2}} x\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 dx$$

$$=\frac{1}{12}\left(\frac{a}{2}-0\right)^4$$

$$=\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{12}a^4$$

さらに，$S_2=\int_0^a\left\{(-x^3+ax^2+bx)-bx\right\}dx$

$$=-\int_0^a x^2\left(x-a\right)dx$$

$$=\frac{1}{12}\left(a-0\right)^4$$

$$=\frac{1}{12}a^4$$

よって $S_1:S_2=\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{12}a^4:\frac{1}{12}a^4$

$$=1:16$$

[注]

解答中で $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$

$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$ を用いた。

一般的には $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,dx=(-1)^n\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$ が成り立つ。

[東京工業大学 2003 年 前期 $\boxed{2}$]

☆────☆

2 辺の長さの比が$1:a$ $(a>1)$の長方形がある。この長方形から 1 本の線分にそって切ることにより正方形を取り去る。残った図形が正方形でなければ，再び同じ要領で正方形を取り去り，残りが正方形でない限りこの作業を続ける。例えば，$a=3,\ a=\dfrac{3}{2}$ の場合はどちらも 2 回でこの操作は終わる。

(1) 3 回でこの操作が終わるような a の値をすべて求めよ。

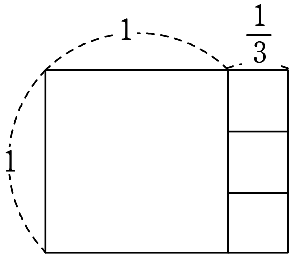
(2) n 回の操作で終わるような a の値の最大値と最小値を求めよ。

☆────☆

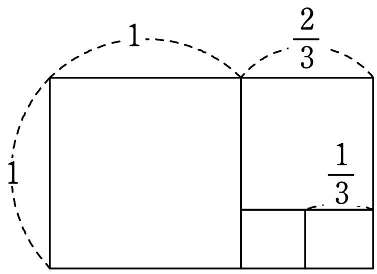
(1) 1 辺の長さを 1 に固定して考えても一般性を失わない。

1 辺の長さ 1 の正方形が何回取り去られるかについて場合分けをする。

(i) 1 回のとき

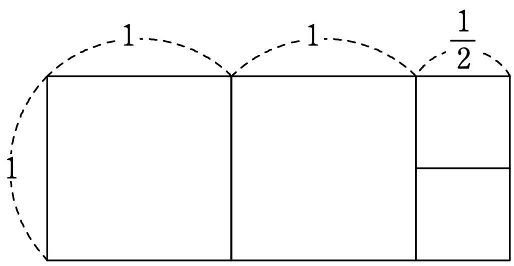


$a=\dfrac{4}{3}$



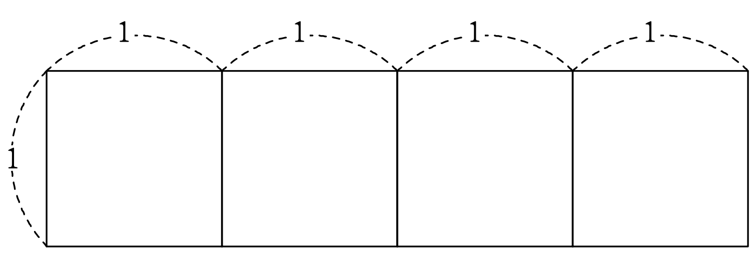
$a=\dfrac{5}{3}$

(ii) 2 回のとき



$a=\dfrac{5}{2}$

(iii) 3 回のとき



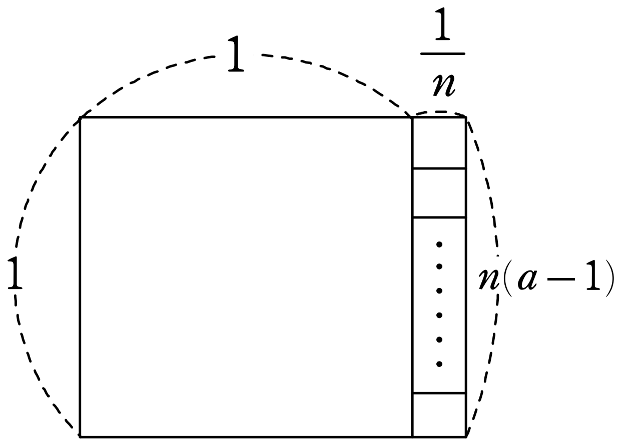
$a=4$

したがって $a=\dfrac{4}{3},\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{5}{2},\ 4$

(2) (1)の結果を利用して考えると

aが最小になるのは，1 辺の長さ 1 の正方形が 1 回取り去られ，残った長方形が$n-1$回の操作ですべて取り去られるときである。

このとき $n(a-1)=1$ より $a=1+\dfrac{1}{n}$ …① となる。



①よりも小さいaが存在したとすると $a<1+\dfrac{1}{n}$ より $n(a-1)<1$ となってn回で操作が終了しない。

また，aが最大となるのは $a=n+1$ …② のときである。

②よりも大きいaが存在したとすると $a>n+1$ より n回操作をしても，隣り合う 2 辺の長さが 1, $a-n(>1)$の長方形が残るので操作が終了しない。

よって，aの最大値は $n+1$ ，最小値は $1+\dfrac{1}{n}$

[東京工業大学 2003 年 前期 $\boxed{3}$]

☆ ☆

△ABCにおいて，辺ABの中点をM，辺ACの中点をNとする。辺ABを $x:1-x$ $(0\leqq x<1)$ の比に内分する点Pと，辺ACを $y:1-y$ $(0\leqq y<1)$ の比に内分する点Qをとり，線分BQと線分CPの交点をRとする。このとき，Rが△AMNに含まれるような $(x,\ y)$ 全体を xy 平面に図示し，その面積を求めよ。（ただし，辺AB，辺ACを $0:1$ の比に内分する点とは，ともに点Aのこととする。）

☆ ☆

$x\neq 0,\ y\neq 0$ とすると，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{AP}}\cdot\frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{BR}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{QC}}=1 \iff \frac{1-x}{x}\cdot\frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{BR}}\cdot\frac{1}{1-y}=1$$

$$\iff \frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{BR}}=\frac{x(1-y)}{1-x}$$

よって $\mathrm{BR}:\mathrm{RQ}=(1-x):x(1-y)$

したがって
$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{x(1-y)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-x)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{(1-x)+x(1-y)}$$
$$=\frac{x(1-y)}{1-xy}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{y(1-x)}{1-xy}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$=\frac{2x(1-y)}{1-xy}\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\frac{2y(1-x)}{1-xy}\overrightarrow{\mathrm{AN}}$$

これは $x=0,\ y=0$ でも成り立つ。

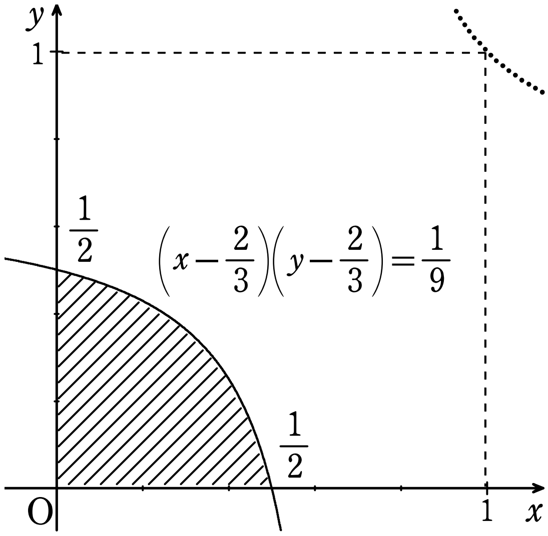
Rが△AMNに含まれるとき

$$\begin{cases}\dfrac{2x(1-y)}{1-xy}\geqq 0 & \cdots① \\[2mm] \dfrac{2y(1-x)}{1-xy}\geqq 0 & \cdots② \\[2mm] 0\leqq\dfrac{2x(1-y)}{1-xy}+\dfrac{2y(1-x)}{1-xy}\leqq 1 & \cdots③\end{cases}$$

となるが，$0\leqq x<1,\ 0\leqq y<1$ であるから①，②，③の左側は成り立っている。

したがって
$$\frac{2x(1-y)}{1-xy}+\frac{2y(1-x)}{1-xy}\leqq 1 \iff 2x(1-y)+2y(1-x)\leqq 1-xy$$
$$\iff 3xy-2x-2y+1\geqq 0$$
$$\iff \left(x-\frac{2}{3}\right)\left(y-\frac{2}{3}\right)\geqq\frac{1}{9}\quad\cdots④$$ を得る。

④を $0 \leqq x < 1,\ 0 \leqq y < 1$ において図示すると，点 $(x,\ y)$ の存在範囲は図の斜線部部分（境界線上の点も含む）であり，求める面積を S とすれば



$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{9\left(x-\frac{2}{3}\right)} + \frac{2}{3} \right\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{9}\log\left|x-\frac{2}{3}\right| + \frac{2}{3}x \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{2}{9}\log 2$$

[東京工業大学 2003 年 前期 $\boxed{4}$]

関数 $f(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ を次の漸化式により定める。

$$f_1(x)=x^2,\ f_{n+1}(x)=f_n(x)+x^3 f_n^{(2)}(x)$$

ただし，$f_n^{(k)}(x)$ とは $f_n(x)$ の第 k 次導関数を表す。

(1) $f_n(x)$ は（$n+1$）次多項式であることを示し，x^{n+1} の係数を求めよ。

(2) $f_n^{(1)}(0),\ f_n^{(2)}(0),\ f_n^{(3)}(0),\ f_n^{(4)}(0)$ を求めよ。

---

(1) $f_{n+1}(x)=f_n(x)+x^3 f_n^{(2)}(x)$ $\cdots$（＊）

$f_n(x)$ が（$n+1$）次多項式であることを数学的帰納法で示す。

(ｉ) $n=1$ のとき

$f_1(x)=x^2$ であるから成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき

$f_k(x)$ が（$k+1$）次多項式であるとすると

$f_k(x)=a_{k+1}x^{k+1}+g_k(x)$（$a_{k+1}\neq 0$,（$g_k(x)$ の次数）$\leqq k$ ）と表せる。

このとき，$f_n^{(2)}(x)=(k+1)ka_{k+1}x^{k-1}+g_k{}^{(2)}(x)$ であり

（＊）より $f_{k+1}(x)=f_k(x)+x^3 f_n^{(2)}(x)$

$$=f_k(x)+x^3\{(k+1)ka_{k+1}x^{k-1}+g_k{}^{(2)}(x)\}$$

$$=(k+1)ka_{k+1}x^{k+2}+f_k(x)+x^3 g_k{}^{(2)}(x)$$ となるが，

$f_k(x)+x^3 g_k{}^{(2)}(x)$ は（$k+1$）次以下であり，$a_{k+1}\neq 0$ なので

$f_{k+1}(x)$ は（$k+2$）次式である。

よって，(ｉ)(ii)より $f_n(x)$ は（$n+1$）次多項式である。

また，$a_{n+2}=(n+1)na_{n+1}\ (n≧1)$ であるから両辺を$(n+1)!n!$で割ると

$$\frac{a_{n+2}}{(n+1)!n!}=\frac{a_{n+1}}{n!(n-1)!}$$ が成り立ち，

さらに $a_2=1$ であることから

$$\frac{a_{n+1}}{n!(n-1)!}=\frac{a_n}{(n-1)!(n-2)!}=\cdots=\frac{a_2}{1!0!}=1$$ となるので

（x^{n+1}の係数）＝$a_{n+1}=n!(n-1)!$

(2)　（＊）をxで微分すると

$$f_{n+1}{}^{(1)}(x)=f_n{}^{(1)}(x)+3x^2f_n{}^{(2)}(x)+x^3f_n{}^{(3)}(x)\quad\cdots①$$

①で$x=0$として　$f_{n+1}{}^{(1)}(0)=f_n{}^{(1)}(0)$

$f_1{}^{(1)}(0)=0$ であるから　$f_n{}^{(1)}(0)=0$

さらに①の両辺をxで微分すると

$$f_{n+1}{}^{(2)}(x)=f_n{}^{(2)}(x)+6x\,f_n{}^{(2)}(x)+6x^2f_n{}^{(3)}(x)+x^3f_n{}^{(4)}(x)\quad\cdots②$$

②で$x=0$として　$f_{n+1}{}^{(2)}(0)=f_n{}^{(2)}(0)$

$f_1{}^{(2)}(0)=2$ であるから　$f_n{}^{(2)}(0)=2$

さらに②の両辺をxで微分すると

$$f_{n+1}{}^{(3)}(x)=f_n{}^{(3)}(x)+6f_n{}^{(2)}(x)+18x\,f_n{}^{(3)}(x)+9x^2f_n{}^{(4)}(x)+x^3f_n{}^{(5)}(x)\quad\cdots③$$

③で$x=0$として　$f_{n+1}{}^{(3)}(0)=f_n{}^{(3)}(0)+6f_n{}^{(2)}(0)$

$$=f_n{}^{(3)}(0)+12$$

$f_1{}^{(3)}(0)=0$ より　$f_n{}^{(3)}(0)=0+(n-1)\cdot12$

$$=12(n-1)$$ を得る。

さらに③の両辺をxで微分すると

$$f_{n+1}{}^{(4)}(x)=f_n{}^{(4)}(x)+24f_n{}^{(3)}(x)+36x\,f_n{}^{(4)}(x)+12x^2f_n{}^{(5)}(x)+x^3f_n{}^{(6)}(x)\quad\cdots④$$

④で $x=0$ として　$f_{n+1}{}^{(4)}(0)=f_n{}^{(4)}(0)+24f_n^{(3)}(0)$

$$f_{n+1}{}^{(4)}(0)=f_n{}^{(4)}(0)+24\cdot 12(n-1)=f_n{}^{(4)}(0)+288(n-1)$$

$n\geqq 2$ のとき　$f_n{}^{(4)}(0)=f_1^{(4)}(0)+\sum_{k=1}^{n-1}288(k-1)$

$$=0+144(n-1)(n-2)$$

$$=144(n-1)(n-2)$$　これは $n=1$ でも成り立っている。

したがって $f_n{}^{(4)}(0)=144(n-1)(n-2)$