[東京工業大学 2003 年 前期 $\boxed{1}$]

☆ ☆

(1) 3 次関数 $y=-x^3+ax^2+bx\ \ (a>0)$ のグラフを C とする。原点を通る直線で，C とちょうど 2 点を共有するものを 2 本求めよ。

(2) (1)で求めた直線のうち，傾きの大きい方を ℓ_1，小さい方を ℓ_2 とする。C と ℓ_1 が囲む部分の面積を S_1，C と ℓ_2 が囲む部分の面積を S_2 とおく。この二つの面積の比 $S_1 : S_2$ を求めよ。

☆ ☆

[東京工業大学 2003 年 前期 $\boxed{2}$]

2 辺の長さの比が$1:a\ (a>1)$の長方形がある。この長方形から 1 本の線分にそって切ることにより正方形を取り去る。残った図形が正方形でなければ，再び同じ要領で正方形を取り去り，残りが正方形でない限りこの作業を続ける。例えば，$a=3,\ a=\dfrac{3}{2}$の場合はどちらも 2 回でこの操作は終わる。

(1) 3 回でこの操作が終わるようなaの値をすべて求めよ。

(2) n回の操作で終わるようなaの値の最大値と最小値を求めよ。

[東京工業大学 2003 年 前期 $\boxed{3}$]

☆──────────────────────────────☆

△ABC において，辺 AB の中点を M，辺 AC の中点を N とする。辺 AB を $x:1-x$ $(0 \leqq x < 1)$ の比に内分する点 P と，辺 AC を $y:1-y$ $(0 \leqq y < 1)$ の比に内分する点 Q をとり，線分 BQ と線分 CP の交点を R とする。このとき，R が△AMN に含まれるような $(x,\ y)$ 全体を xy 平面に図示し，その面積を求めよ。（ただし，辺 AB，辺 AC を $0:1$ の比に内分する点とは，ともに点 A のこととする。）

☆──────────────────────────────☆

[東京工業大学 2003 年 前期 $\boxed{4}$]

関数 $f(x)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を次の漸化式により定める。

$$f_1(x)=x^2,\ f_{n+1}(x)=f_n(x)+x^3f_n^{(2)}(x)$$

ただし，$f_n^{(k)}(x)$ とは $f_n(x)$ の第 k 次導関数を表す。

(1) $f_n(x)$ は（$n+1$）次多項式であることを示し，x^{n+1} の係数を求めよ。

(2) $f_n^{(1)}(0),\ f_n^{(2)}(0),\ f_n^{(3)}(0),\ f_n^{(4)}(0)$ を求めよ。