[ 東京工業大学 2003 年 前期 $\boxed{4}$ ]

☆ ☆

関数 $f(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ を次の漸化式により定める。

$$f_1(x)=x^2,\ f_{n+1}(x)=f_n(x)+x^3 f_n^{(2)}(x)$$

ただし， $f_n^{(k)}(x)$ とは $f_n(x)$ の第 $k$ 次導関数を表す。

(1) $f_n(x)$ は（$n+1$）次多項式であることを示し， $x^{n+1}$ の係数を求めよ。

(2) $f_n^{(1)}(0),\ f_n^{(2)}(0),\ f_n^{(3)}(0),\ f_n^{(4)}(0)$ を求めよ。

☆ ☆

(1) $f_{n+1}(x)=f_n(x)+x^3 f_n^{(2)}(x)$ …（＊）

$f_n(x)$ が（$n+1$）次多項式であることを数学的帰納法で示す。

(ｉ) $n=1$のとき

$f_1(x)=x^2$ であるから成り立つ。

(ⅱ) $n=k$ のとき

$f_k(x)$ が（$k+1$）次多項式であるとすると

$f_k(x)=a_{k+1}x^{k+1}+g_k(x)$（$a_{k+1}\neq 0$ ,（$g_k(x)$の次数） $\leqq k$ ）と表せる。

このとき， $f_n^{(2)}(x)=(k+1)ka_{k+1}x^{k-1}+g_k{}^{(2)}(x)$ であり

（＊）より $f_{k+1}(x)=f_k(x)+x^3 f_n^{(2)}(x)$

$$=f_k(x)+x^3\{(k+1)ka_{k+1}x^{k-1}+g_k{}^{(2)}(x)\}$$

$$=(k+1)ka_{k+1}x^{k+2}+f_k(x)+x^3g_k{}^{(2)}(x)$$ となるが,

$f_k(x)+x^3g_k{}^{(2)}(x)$ は（$k+1$）次以下であり， $a_{k+1}\neq 0$ なので

$f_{k+1}(x)$ は（$k+2$）次式である。

よって，(ｉ)(ⅱ)より $f_n(x)$ は（$n+1$）次多項式である。

また，$a_{n+2}=(n+1)na_{n+1}\ (n\geqq 1)$ であるから両辺を$(n+1)!n!$で割ると

$$\frac{a_{n+2}}{(n+1)!n!}=\frac{a_{n+1}}{n!(n-1)!}$$ が成り立ち，

さらに $a_2=1$ であることから

$$\frac{a_{n+1}}{n!(n-1)!}=\frac{a_n}{(n-1)!(n-2)!}=\cdots=\frac{a_2}{1!0!}=1$$ となるので

（$x^{n+1}$の係数）＝$a_{n+1}=n!(n-1)!$

(2)　（＊）を$x$で微分すると

$$f_{n+1}{}^{(1)}(x)=f_n{}^{(1)}(x)+3x^2f_n{}^{(2)}(x)+x^3f_n{}^{(3)}(x)\quad\cdots①$$

①で$x=0$として　$f_{n+1}{}^{(1)}(0)=f_n{}^{(1)}(0)$

$f_1{}^{(1)}(0)=0$ であるから　$f_n{}^{(1)}(0)=0$

さらに①の両辺を$x$で微分すると

$$f_{n+1}{}^{(2)}(x)=f_n{}^{(2)}(x)+6xf_n{}^{(2)}(x)+6x^2f_n{}^{(3)}(x)+x^3f_n{}^{(4)}(x)\quad\cdots②$$

②で$x=0$として　$f_{n+1}{}^{(2)}(0)=f_n{}^{(2)}(0)$

$f_1{}^{(2)}(0)=2$ であるから　$f_n{}^{(2)}(0)=2$

さらに②の両辺を$x$で微分すると

$$f_{n+1}{}^{(3)}(x)=f_n{}^{(3)}(x)+6f_n{}^{(2)}(x)+18xf_n{}^{(3)}(x)+9x^2f_n{}^{(4)}(x)+x^3f_n{}^{(5)}(x)\quad\cdots③$$

③で$x=0$として　$f_{n+1}{}^{(3)}(0)=f_n{}^{(3)}(0)+6f_n{}^{(2)}(0)$

$$=f_n{}^{(3)}(0)+12$$

$f_1{}^{(3)}(0)=0$ より　$f_n{}^{(3)}(0)=0+(n-1)\cdot 12$

$$=12(n-1)$$ を得る。

さらに③の両辺を$x$で微分すると

$$f_{n+1}{}^{(4)}(x)=f_n{}^{(4)}(x)+24f_n{}^{(3)}(x)+36xf_n{}^{(4)}(x)+12x^2f_n{}^{(5)}(x)+x^3f_n{}^{(6)}(x)\quad\cdots④$$

④で $x=0$ として　$f_{n+1}{}^{(4)}(0)=f_n{}^{(4)}(0)+24f_n^{(3)}(0)$

$f_{n+1}{}^{(4)}(0)=f_n{}^{(4)}(0)+24\cdot12(n-1)=f_n{}^{(4)}(0)+288(n-1)$

$n≧2$ のとき　$f_n{}^{(4)}(0)=f_1^{(4)}(0)+\sum_{k=1}^{n-1}288(k-1)$

$=0+144(n-1)(n-2)$

$=144(n-1)(n-2)$　これは $n=1$ でも成り立っている。

したがって $f_n{}^{(4)}(0)=144(n-1)(n-2)$