[東京工業大学 2003 年 前期 $\boxed{3}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

△ABC において，辺 AB の中点を M，辺 AC の中点を N とする。辺 AB を $x:1-x$ $(0 \leqq x < 1)$ の比に内分する点 P と，辺 AC を $y:1-y$ $(0 \leqq y < 1)$ の比に内分する点 Q をとり，線分 BQ と線分 CP の交点を R とする。このとき，R が△AMN に含まれるような (x, y) 全体を xy 平面に図示し，その面積を求めよ。（ただし，辺 AB，辺 AC を $0:1$ の比に内分する点とは，ともに点 A のこととする。）

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$x \neq 0,\ y \neq 0$ とすると，メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{AP}} \cdot \frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{BR}} \cdot \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{QC}} = 1 \iff \frac{1-x}{x} \cdot \frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{BR}} \cdot \frac{1}{1-y} = 1$$

$$\iff \frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{BR}} = \frac{x(1-y)}{1-x}$$

よって $\mathrm{BR}:\mathrm{RQ} = (1-x):x(1-y)$

したがって
$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \frac{x(1-y)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-x)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{(1-x)+x(1-y)}$$
$$= \frac{x(1-y)}{1-xy}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{y(1-x)}{1-xy}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$= \frac{2x(1-y)}{1-xy}\overrightarrow{\mathrm{AM}} + \frac{2y(1-x)}{1-xy}\overrightarrow{\mathrm{AN}}$$

これは $x=0,\ y=0$ でも成り立つ。

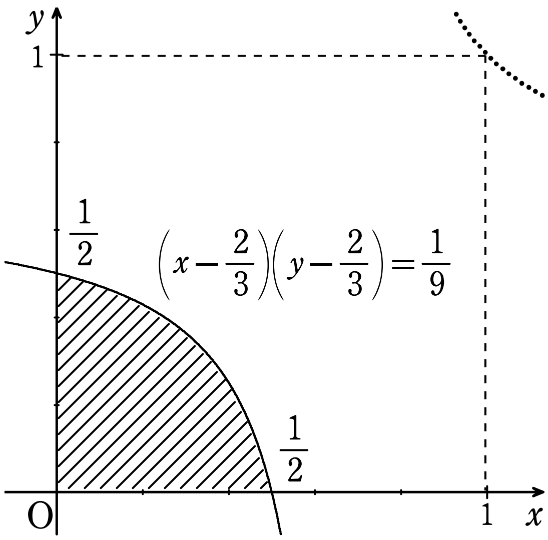
R が△AMN に含まれるとき

$$\begin{cases} \dfrac{2x(1-y)}{1-xy} \geqq 0 & \cdots① \\ \dfrac{2y(1-x)}{1-xy} \geqq 0 & \cdots② \\ 0 \leqq \dfrac{2x(1-y)}{1-xy} + \dfrac{2y(1-x)}{1-xy} \leqq 1 & \cdots③ \end{cases}$$

となるが，$0 \leqq x < 1,\ 0 \leqq y < 1$ であるから①，②，③の左側は成り立っている。

したがって
$$\frac{2x(1-y)}{1-xy} + \frac{2y(1-x)}{1-xy} \leqq 1 \iff 2x(1-y) + 2y(1-x) \leqq 1-xy$$
$$\iff 3xy - 2x - 2y + 1 \geqq 0$$
$$\iff \left(x - \frac{2}{3}\right)\left(y - \frac{2}{3}\right) \geqq \frac{1}{9} \quad \cdots④$$
を得る。

④を $0 \leqq x < 1,\ 0 \leqq y < 1$ において図示すると，点$(x,\ y)$の存在範囲は図の斜線部部分（境界線上の点も含む）であり，求める面積をSとすれば



$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{9\left(x-\frac{2}{3}\right)} + \frac{2}{3} \right\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{9}\log\left|x-\frac{2}{3}\right| + \frac{2}{3}x \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{2}{9}\log 2$$