[東京工業大学 2003 年 前期 $\boxed{2}$]

☆ ☆

2 辺の長さの比が$1:a\ (a>1)$の長方形がある。この長方形から 1 本の線分にそって切ることにより正方形を取り去る。残った図形が正方形でなければ，再び同じ要領で正方形を取り去り，残りが正方形でない限りこの作業を続ける。例えば，$a=3,\ a=\dfrac{3}{2}$ の場合はどちらも 2 回でこの操作は終わる。

(1) 3 回でこの操作が終わるような a の値をすべて求めよ。

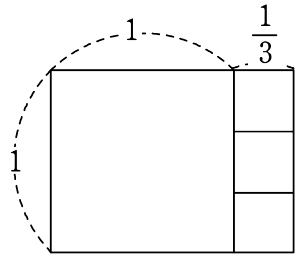
(2) n 回の操作で終わるような a の値の最大値と最小値を求めよ。

☆ ☆

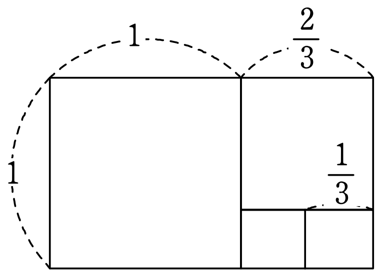
(1) 1 辺の長さを 1 に固定して考えても一般性を失わない。

1 辺の長さ 1 の正方形が何回取り去られるかについて場合分けをする。

(i) 1 回のとき

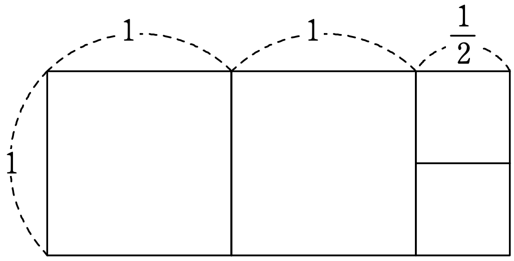


$a=\dfrac{4}{3}$



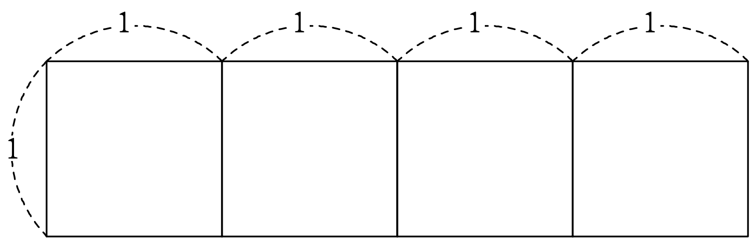
$a=\dfrac{5}{3}$

(ii) 2 回のとき



$a=\dfrac{5}{2}$

(iii) 3 回のとき



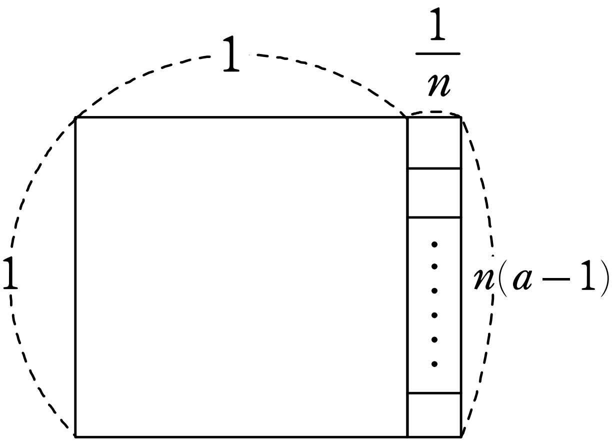
$a=4$

したがって $a=\dfrac{4}{3},\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{5}{2},\ 4$

(2) (1)の結果を利用して考えると

aが最小になるのは，1 辺の長さ 1 の正方形が 1 回取り去られ，残った長方形が$n-1$回の操作ですべて取り去られるときである。

このとき $n(a-1)=1$ より $a=1+\dfrac{1}{n}$ …① となる。



①よりも小さいaが存在したとすると $a<1+\dfrac{1}{n}$ より $n(a-1)<1$ となってn回で操作が終了しない。

また，aが最大となるのは $a=n+1$ …② のときである。

②よりも大きいaが存在したとすると $a>n+1$ より n回操作をしても，隣り合う 2 辺の長さが 1, $a-n\,(>1)$の長方形が残るので操作が終了しない。

よって，aの最大値は $n+1$ ，最小値は $1+\dfrac{1}{n}$