[東京工業大学 2003 年 前期 $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) 3 次関数 $y=-x^3+ax^2+bx\ \ (a>0)$ のグラフを C とする。原点を通る直線で，C とちょうど 2 点を共有するものを 2 本求めよ。

(2) (1)で求めた直線のうち，傾きの大きい方を ℓ_1，小さい方を ℓ_2 とする。C と ℓ_1 が囲む部分の面積を S_1，C と ℓ_2 が囲む部分の面積を S_2 とおく。この二つの面積の比 $S_1:S_2$ を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) 3 次関数のグラフと直線の共有点の個数は 1，2，3 個のいずれかである。

2 個となるのは，直線が 3 次関数のグラフの接線になるときである。

$f(x)=-x^3+ax^2+bx$ とおくと $f'(x)=-3x^2+2ax+b$ であり

$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

$$y-(-t^3+at^2+bt)=(-3t^2+2at+b)(x-t)\quad \cdots ①$$

これが原点を通るとき

$$0-(-t^3+at^2+bt)=(-3t^2+2at+b)(0-t)\ \text{より}$$

$$2t^3-at^2=0 \iff t^2(2t-a)=0\ \text{から}\ t=0,\ \frac{a}{2}$$

これを①に代入して，求める直線は $y=bx,\ y=\left(\dfrac{1}{4}a^2+b\right)x$

(2) $\dfrac{1}{4}a^2+b>b$ であるから

$$\ell_1 : y=\left(\frac{1}{4}a^2+b\right)x,\quad \ell_2 : y=bx\ \text{である。}$$

したがって
$$S_1=\int_0^{\frac{a}{2}}\left\{\left(\frac{1}{4}a^2+b\right)x-(-x^3+ax^2+bx)\right\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{a}{2}} x\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 dx$$

$$=\frac{1}{12}\left(\frac{a}{2}-0\right)^4$$

$$=\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{12}a^4$$

さらに，$S_2=\int_0^a\left\{(-x^3+ax^2+bx)-bx\right\}dx$

$$=-\int_0^a x^2\left(x-a\right)dx$$

$$=\frac{1}{12}\left(a-0\right)^4$$

$$=\frac{1}{12}a^4$$

よって $S_1:S_2=\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{12}a^4:\frac{1}{12}a^4$

$$=1:16$$

[注]

解答中で $\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$

$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$ を用いた。

一般的には $\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,dx=(-1)^n\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$ が成り立つ。