[東京工業大学 2002 年後期 $\boxed{1}$]

---

n を自然数とする。

(1) 実数 x に対して，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}-\frac{1}{1+x^2}$ を求めよ。

(2) 不等式 $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}-\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\right| \leqq \frac{1}{2n+3}$ が成り立つことを示せ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ を求めよ。

---

(1)
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}-\frac{1}{1+x^2} &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(x^2\right)^k-\frac{1}{1+x^2}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(-x^2\right)^k-\frac{1}{1+x^2}\\
&= \frac{1-\left(-x^2\right)^{n+1}}{1-\left(-x^2\right)}-\frac{1}{1+x^2}\\
&= \frac{-\left(-x^2\right)^{n+1}}{1+x^2}\\
&= \frac{(-1)^{n+2}x^{2(n+1)}}{1+x^2}\\
&= \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2} \quad \cdots①
\end{aligned}$$

(2) ①の両辺を 0 から 1 まで x で積分すると

$$\int_0^1\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}-\frac{1}{1+x^2}\right\}dx=\int_0^1\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}dx$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 x^{2k}\,dx-\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}dx-\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx \quad \cdots②$$

②の両辺の絶対値をとると

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}dx-\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx\right|=\left|(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx\right|=\left|\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx\right| \quad \cdots③$$

ここで，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $0 \leqq \dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leqq x^{2n+2}$ なので

$\left| \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \right| \leqq \displaystyle\int_0^1 x^{2n+2} dx = \frac{1}{2n+3}$ …④ であるから

③，④より $\left| \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \right| \leqq \dfrac{1}{2n+3}$ が成り立つ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$ であるから

(2)の結果より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ である。

ここで，$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ において $x = \tan\theta$ と置換すると

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta \, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$

[東京工業大学 2002 年後期 $\boxed{2}$]

xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある。

C を底面，$(0,\ 0,\ \sqrt{3})$ を頂点とする直円すい S を考える。点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 0)$ および $\mathrm{Q}(-2,\ 0,\ 0)$ をとる。

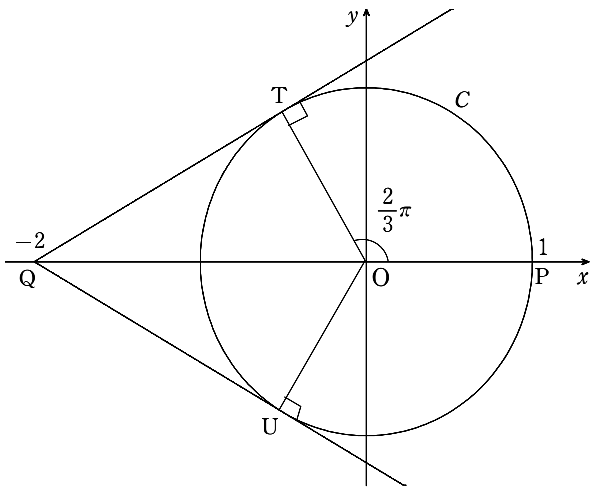
さらに，動点 $\mathrm{M}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ を線分 MQ が M 以外に C と交わらないように動かす。

(1) θ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 点 P から動点 M までは直円すい S の側面上を通り， M からは直線にそって点 Q へ向かう道を考える。このような P から Q までの全ての道の長さの最小値を求めよ。

---

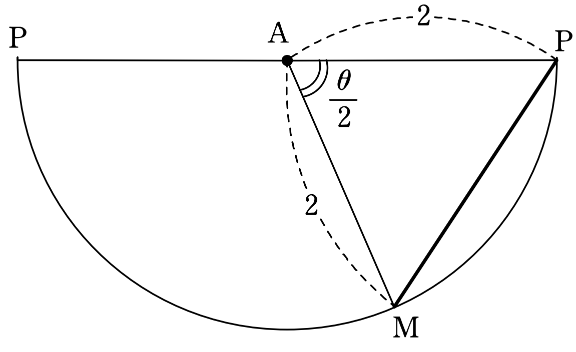
(1) 動点 M は，図の弧 TU の範囲にあればよい。



よって，θ のとりうる値の範囲は $\dfrac{2}{3}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{4}{3}\pi$

(2) 対称性より $\dfrac{2}{3}\pi \leqq \theta \leqq \pi$ で考える。

母線 AP の長さは 2 であり，側面の展開図は図のようになるので



題意の道の長さを L とすると $L = \mathrm{PM} + \mathrm{MQ}$ である。

ここで，余弦定理より $\mathrm{PM}=\sqrt{2^2+2^2-2\cdot 2\cos\angle\mathrm{PAM}}=\sqrt{8-8\cos\dfrac{\theta}{2}}$

2 点間の距離より $\mathrm{MQ}=\sqrt{(\cos\theta+2)^2+\sin^2\theta}$ であるから

$$L=\sqrt{8-8\cos\frac{\theta}{2}}+\sqrt{(\cos\theta+2)^2+\sin^2\theta}$$

$$=2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\frac{\theta}{2}}+\sqrt{5+4\cos\theta}$$

$$=2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\frac{\theta}{2}}+\sqrt{5+4\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)}$$

$$=2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\frac{\theta}{2}}+\sqrt{8\cos^2\frac{\theta}{2}+1}$$

となるが，$t=\cos\dfrac{\theta}{2}$ とおくと，$\dfrac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\pi$ のとき $0\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}$ であり，

$L=2\sqrt{2}\sqrt{1-t}+\sqrt{8t^2+1}$ となる。これを $f(t)$ とおく。

$$f'(t)=2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)+\frac{1}{2}(8t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 16t$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-t}}+\frac{8t}{\sqrt{8t^2+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(4\sqrt{2}t\sqrt{1-t}-\sqrt{8t^2+1}\right)}{\sqrt{1-t}\sqrt{8t^2+1}}$$

ここで，右辺の分子が 0 以上，すなわち $4\sqrt{2}t\sqrt{1-t}\geqq\sqrt{8t^2+1}$ となる t の範囲を求める。

$32t^2(1-t)\geqq 8t^2+1 \Leftrightarrow (4t-1)(8t^2-4t-1)\leqq 0$ であり，

$0\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}$ においては $8t^2-4t-1<0$ であるから

$0\leqq t\leqq\dfrac{1}{4}$ では $f'(t)\leqq 0$ となり $f(t)$ は減少し，

$\dfrac{1}{4}\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}$ では $f'(t)\geqq 0$ となり $f(t)$ は増加する。

よって L の最小値は $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=2\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{3}{4}}+\sqrt{\dfrac{1}{2}+1}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$ である。